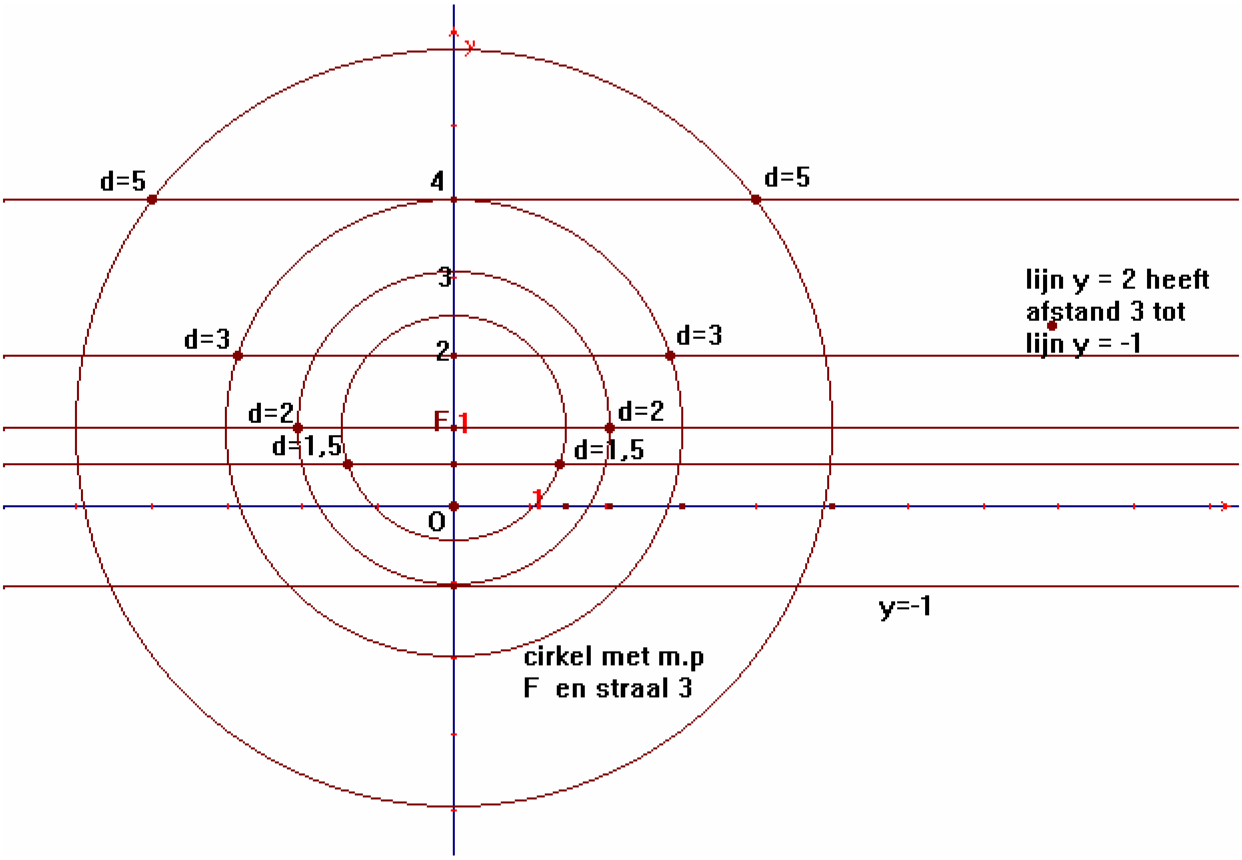
Uitwerkingen Hoofdstuk 25 deel vwoB1,2 6

Meetkundige plaatsen.

1 Punt $F(0\ ,\ 1)$ en de lijn $l : y = -1$

a. Voor de oorsprong O geldt: $d(O,F) = d(O,l) = 1$

ben c.



c. Waarschijnlijk liggen de gevraagde punten op een parabool.

d. Als geldt: $P(x,y)$ dan is: $d(P,l) = y + 1$

e. De afstand van $P(x\ ,\ y)$ tot $F(0\ ,\ 1)$ is volgens Pyth. : $\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$

f. $d(P,l) = d(P,F) \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow y^2+2y+1 = x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow$

$4y = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$

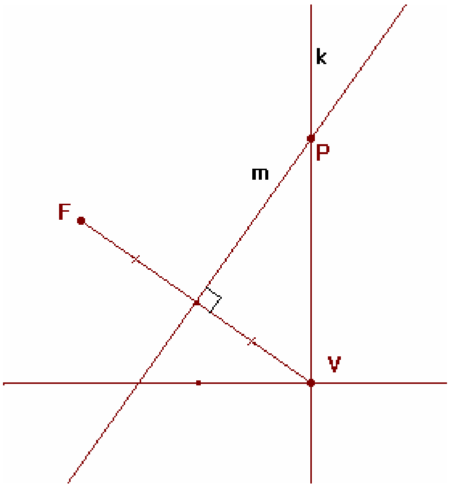
g. Dit is inderdaad de vergelijking van een parabool.

2. Stel het snijpunt van de twee parabolen die ontstaan zijn is P dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} d(P,A)=d(P,l) \\ d(P,B)=d(P,l) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,A)=d(P,B) \Rightarrow \text{punt } P \text{ ligt dus ook op de m.l.l. van } AB.$$

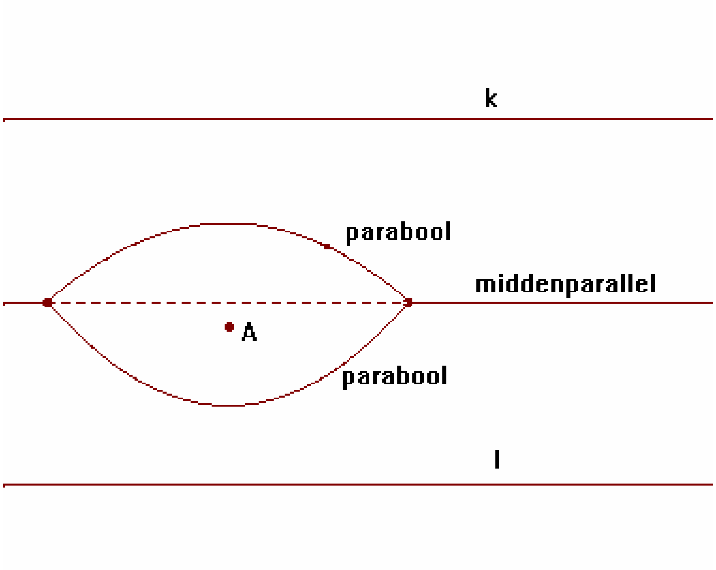
3. Zie de figuur.

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ op m.l.l. m van } FV \Rightarrow PF=PV \\ k \text{ is een loodlijn op } l \Rightarrow d(P,l)=PV \\ PF=d(P,F) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,F)=d(P,l)$$

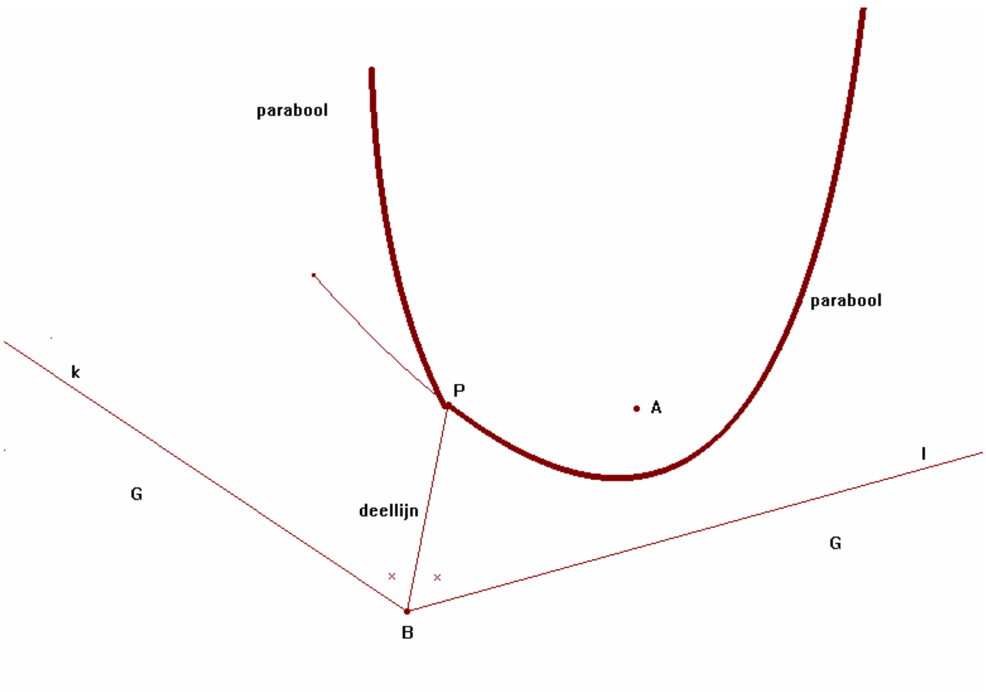


4.

De totale conflictlijn van punt A en de lijnen l en k zijn delen van parabolen met k en l als richtlijnen en punt A als brandpunt en ook twee stukken van de middenparallel van k en l .



5a.

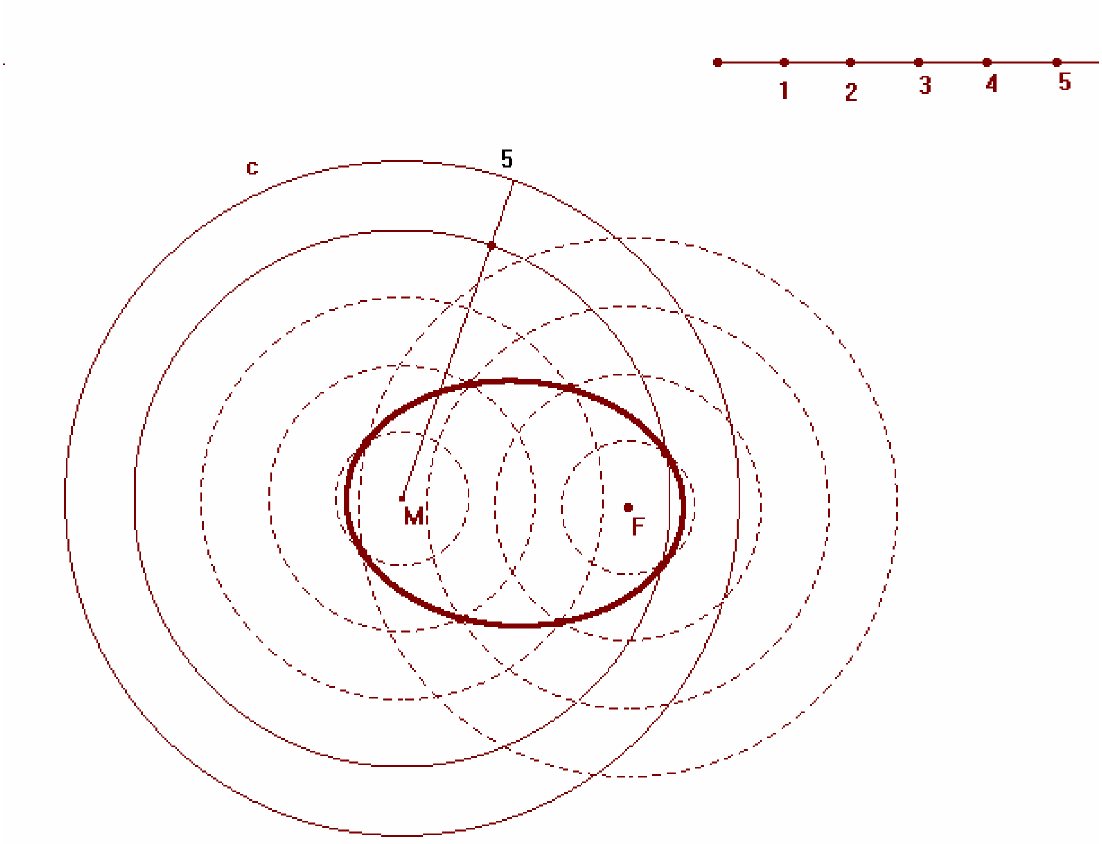


De conflictlijn van G en A bestaat uit een deel van de parabool met brandpunt A en richtlijn l en de parabool met brandpunt A en richtlijn k.

b. Er is een knik bij punt P. Daarvoor geldt:

$$\left.\begin{array}{l} d(P,l)=d(P,A) \\ d(P,k)=d(P,A) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,l)=d(P,k) \Rightarrow P \text{ op de deellijn van hoek B.}$$

6abcd



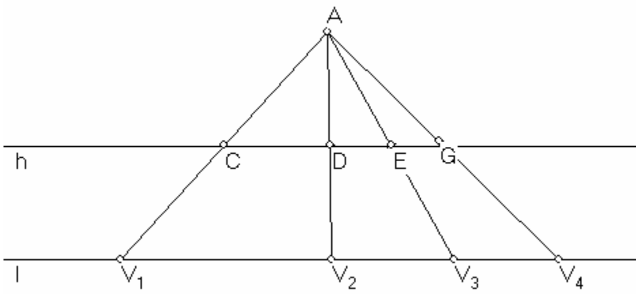
De cirkels hebben hetzelfde middelpunt met stralen 4 en 5 . De afstand van de binnenste tot de buitenste cirkels is dus 1.

b. Een kleine cirkel met m.p. F en straal 1 laten snijden met de cirkel met straal 4 , die dus een afstand 1 heeft tot de buitenste cirkel.

c. Steeds cirkels met verschillende stralen laten snijden met de cirkels die dezelfde afstand hebben tot de buitenste cirkel.

7. Een cirkel met middelpunt M en straal r is de verzameling van punten P waarvoor geldt: $d(P,M)=r$

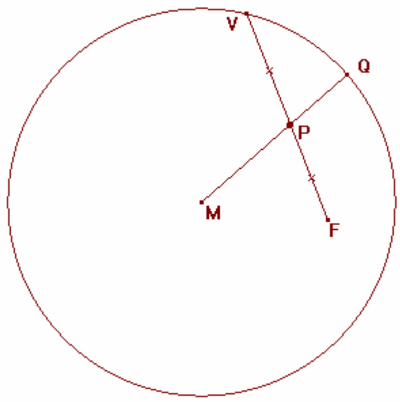
8a.



a. De gevraagde verzameling van de middens is de lijn *h* door al die middens. Deze lijn loopt evenwijdig met lijn *l*.

8b. Het is geen meetkundige plaats want de punten hebben geen gelijke afstanden tot punt A en tot lijn *l*.

9. Dat is niet correct , want het midden P van FV tot de cirkel is niet gelijk aan de afstand tot de cirkel. (geen loodrechte stand).



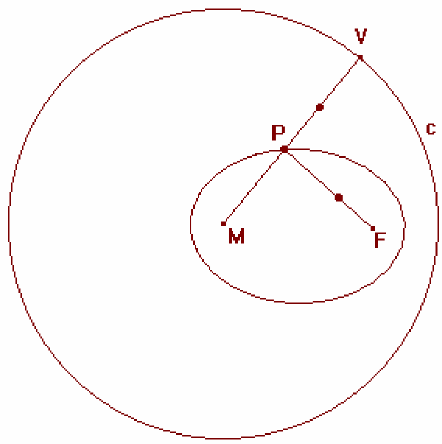
10a. Gegeven is de cirkel met m.p. M en straal r .
Punt F ligt binnen de cirkel en voor punt P geldt :
$d(P,F)=d(P,c)$

Te bewijzen: $d(P,M)+d(P,F)=r$

Bewijs: Noem het snijpunt van MP met cirkel c is punt V. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d(V,P)+d(P,M)=d(M,V)=r \\ d(P,V)=d(P,c)=d(P,F)(geg) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P,F)+d(P,M)=r$$



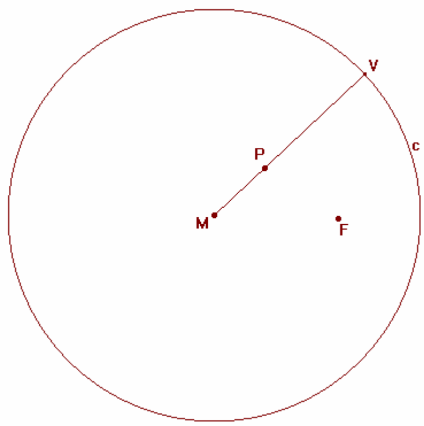
b. Nu is gegeven :
$d(P,M)+d(P,F)=r$

Te bew. $d(P,F)=d(P,c)$

Bewijs:
Zie de rechtse figuur. MP snijdt de cirkel in P.

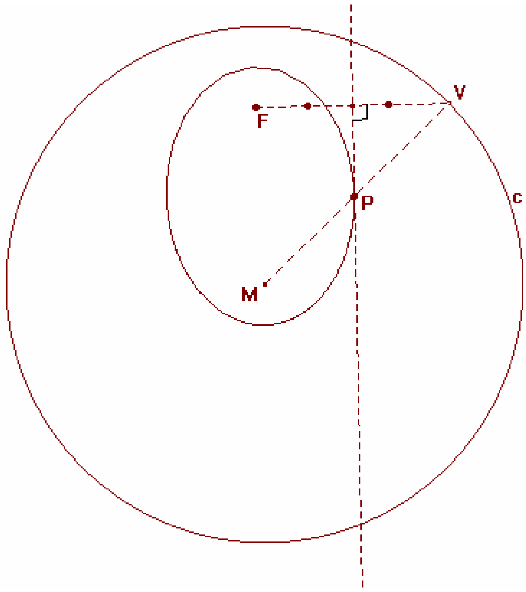
$$\left.\begin{array}{l} d(P,M)+d(P,F)=r \\ d(M,P)+d(P,V)=r \end{array}\right\} \Rightarrow dP,F)=d(P,V)$$

$$\left.\begin{array}{l} dP,V)=d(P,F) \\ d(P,V)=d(P,c) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,F)=d(P,c)$$



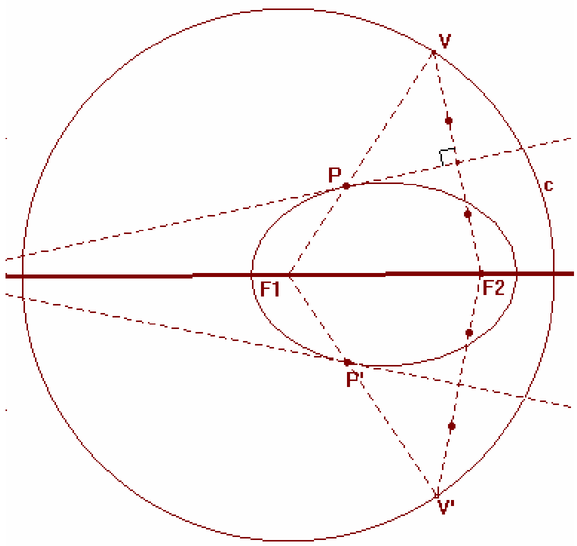
11.

Neem een punt V op c. Teken vervolgens het lijnstuk FV.
Teken ook MV. Teken verder de m.l.l. van FV. Nu deze m.l.l. snijden met MV. Dan geldt dat het snijpunt P een punt is van de conflictlijn. Door deze constructie nog een aantal keren te herhalen ontstaat de totale conflictlijn. Dat is de ellips met brandpunten M en F.



12.

a. Zie de rechtse figuur. Daar zie je dat het conflictpunt P op de bekende manier geconstrueerd is. Door nu deze constructie te spiegelen in de lijn door F_1 en F_2 ontstaat een tweede conflictpunt P'. Uit de spiegeling volgt verder dat $d(P,c) = d(P',c) \Rightarrow$ punt $P'$is dus ook een conflictpunt . $\Rightarrow$ de lijn F_1F_2 is dus symmetrieas van de ellips.



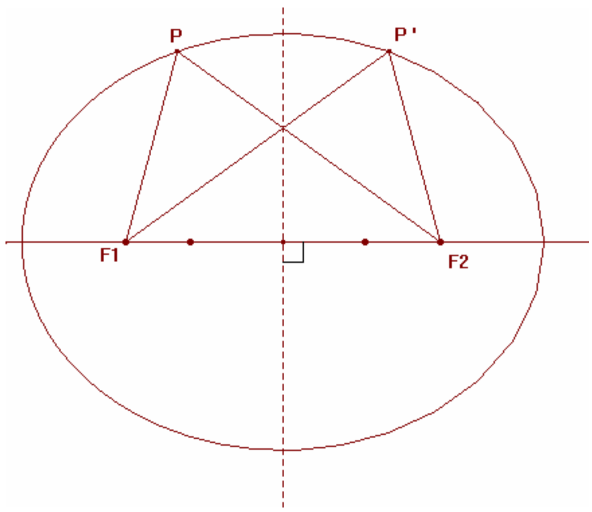
b. Gegeven een ellips met brandpunten F_1 en F_2.

Te bew. De m.l.l. van F_1F_2 is tevens symmetrieas van de ellips.

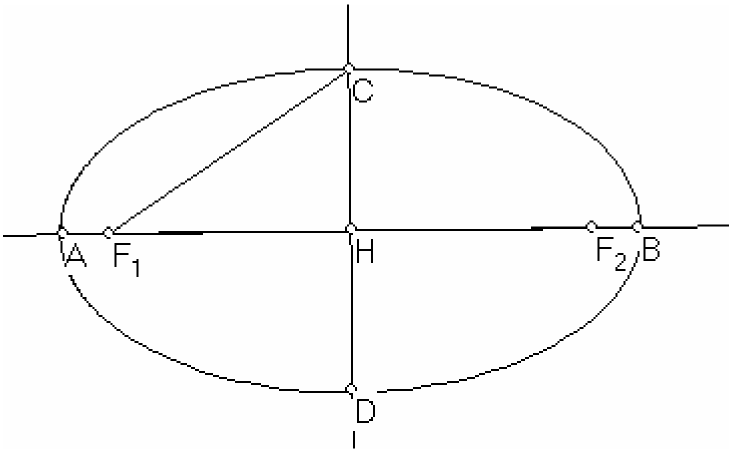
Bewijs: Kies punt P op de ellips en spiegel dit punt in de m.l.l. van $F_1F_2 \Rightarrow P'$. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} d(P,F_1)+d(P,F_2)&=r(ellips)\\ d(P',F_1)&=d(P,F_2)(spiegelen)\\ d(P',F_2)&=d(P',F_1)(spiegelen)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$d(P',F_1)+d(P',F_2)=r \Rightarrow$ ook P' ligt op de ellips met brandpunten F_1 en F_2 . $\Rightarrow$ de m.l.l. van F_1F_2 is symmetrieas van de ellips.

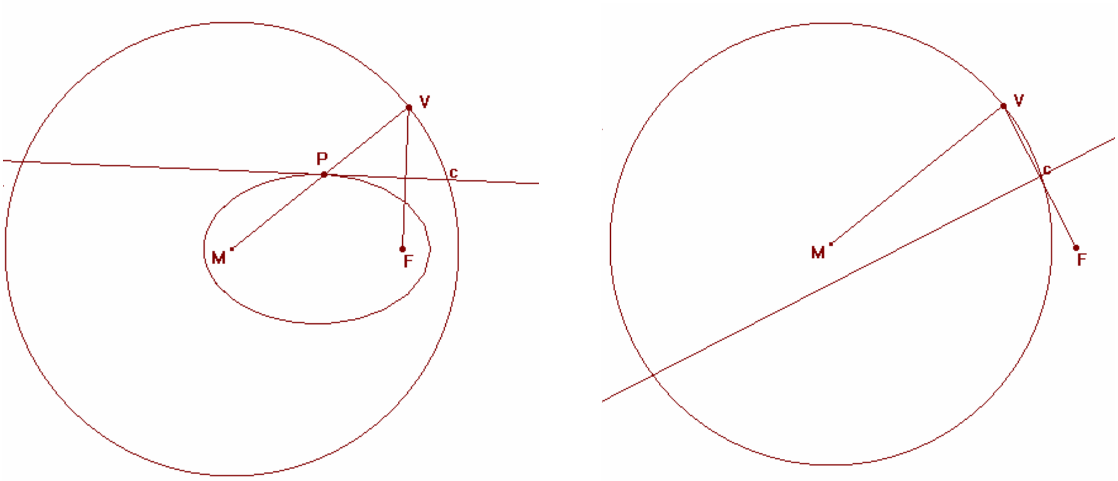


12c. Gegeven : Voor alle punten P op de ellips geldt:
$PF_1 + PF_2 = 5 \Rightarrow$ de straal van de richtcirkel is dus ook 5.
$F_1F_2 = 4$
Ook voor punt C op de ellips geldt
$CF_1 + CF_2 = 5 \Rightarrow CF_1 = 2{,}5$
Verder geldt $F_1H = 0{,}5 \,.\, 4 = 2$
Nu geldt in $\Delta\, F_1HC$: Pyth. $\Rightarrow$
$2{,}5^2 = 4 + CH^2 \Rightarrow CH = 1{,}5 \Rightarrow$
$CD = 3$
Punt A ligt op de ellips $\Rightarrow$



$$\left.\begin{array}{l} AF_1 + AF_2 = 5 \\ AF_2 = AF_1 + F_1F_2 \\ AF_1 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2.AF_1 + 4 = 5 \Leftrightarrow AF_1 = 0{,}5 \Rightarrow AB = 2.AF_1 + F_1F_2 = 1 + 4 = 5$$

13ab.

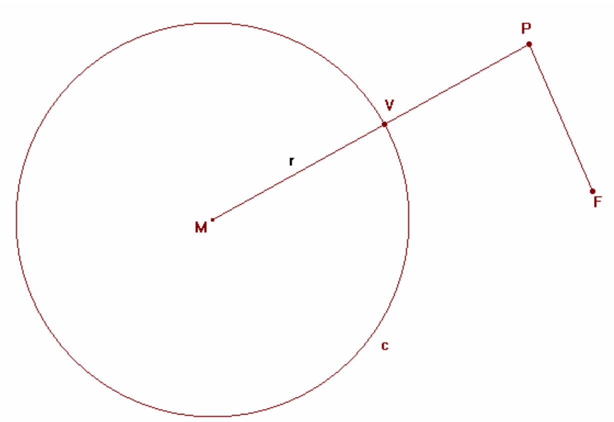


De conflictlijn van F binnen de cirkel is de ellips. Als we F gaan verschuiven tot buiten de cirkel dan krijgen we geen conflictlijn. Er is namelijk geen snijpunt tussen de m.l.l. van FV en MV. Zie de tweede figuur.

14a. Gegeven : Cirkel met m.p. M en straal r en $d(P,F) = d(P,c)$
Te bew. $d(P,M) - d(P,F) = r$

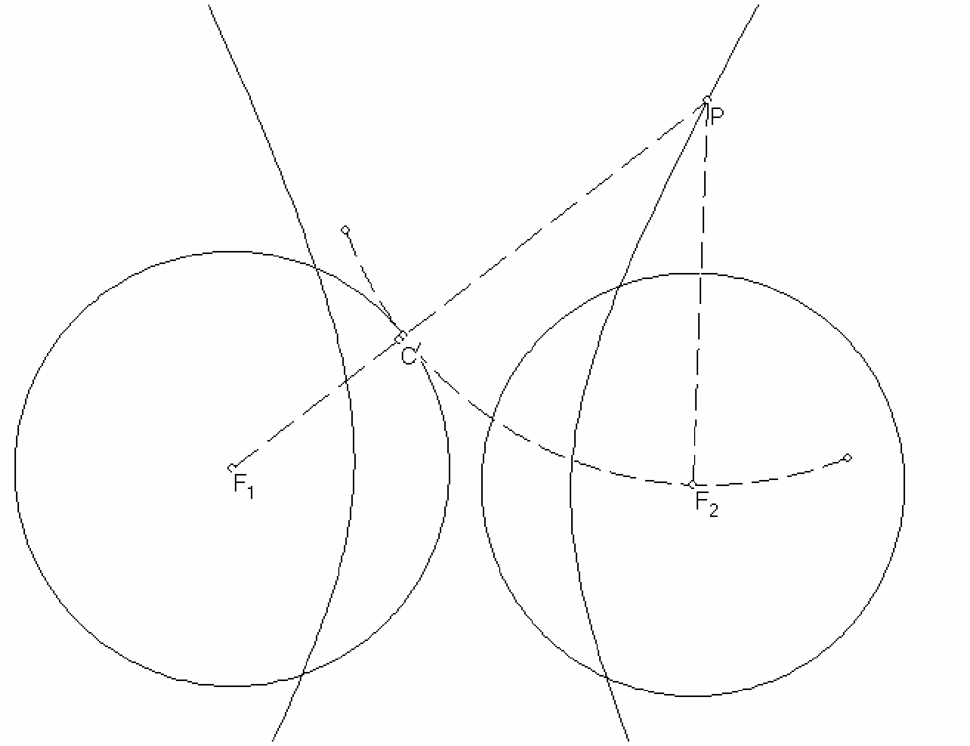
Bewijs:
$$\left.\begin{array}{l} d(P,F) = d(P,c) \Rightarrow PF = PV \\ d(P,M) - d(P,F) = PV + VM - PF \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$
$d(P,M) - d(P,F) = MV + PV - PV = MV = r$



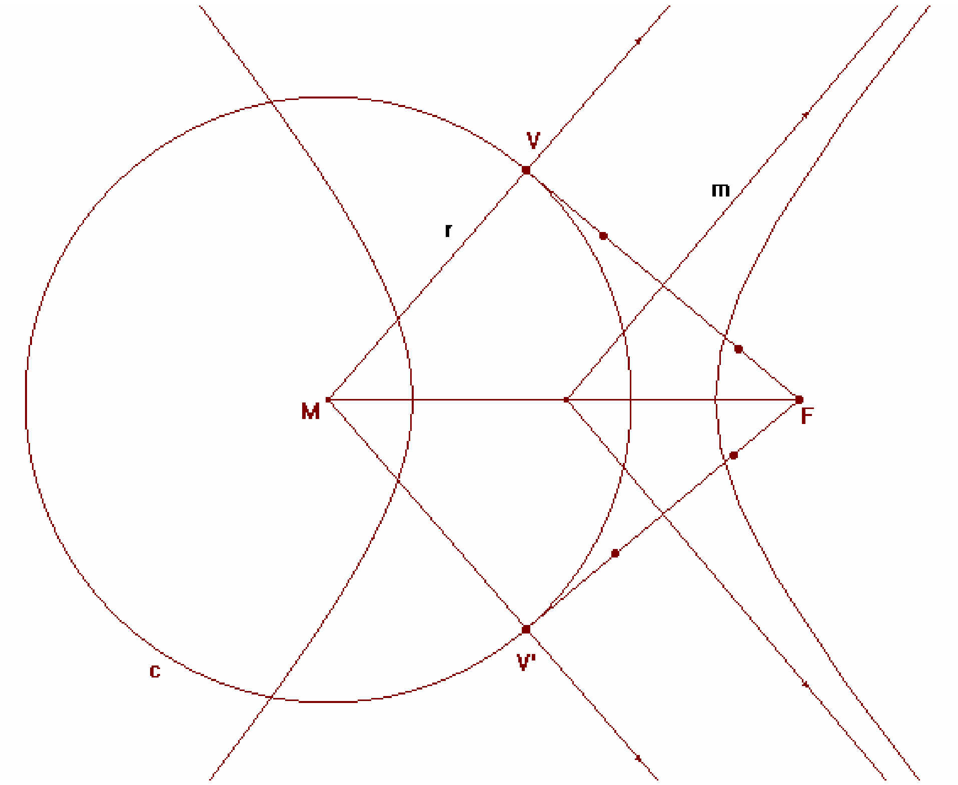
b. $$\left.\begin{array}{l} d(P,M)-d(P,F)=r \Rightarrow d(P,M)=r+d(P,F) \\ d(P,M)=PV+VM=d(P,c)+r \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,F)=d(P,c)$$

15.



Voor een hyperbool geldt: d(P,F) = $d(P,c)$ en $PF_1 - PF_2 = r$.
Kies een willekeurig punt P op de hyperbool. Teken PF_1 en PF_2. Er geldt: $PF_1 - PF_2 = r$. Daarom hebben we de straal nodig door PF_2 af te trekken van PF_1. Dit bereiken we door vanuit P de lengte PF_2 om te cirkelen . Zo krijgen we punt C' op PF_1. De straal van de richtcirkel met middelpunt F_1 is dus F_1C' . De tweede richtcirkel heeft het middelpunt F_2 en dezelfde straal.

16.

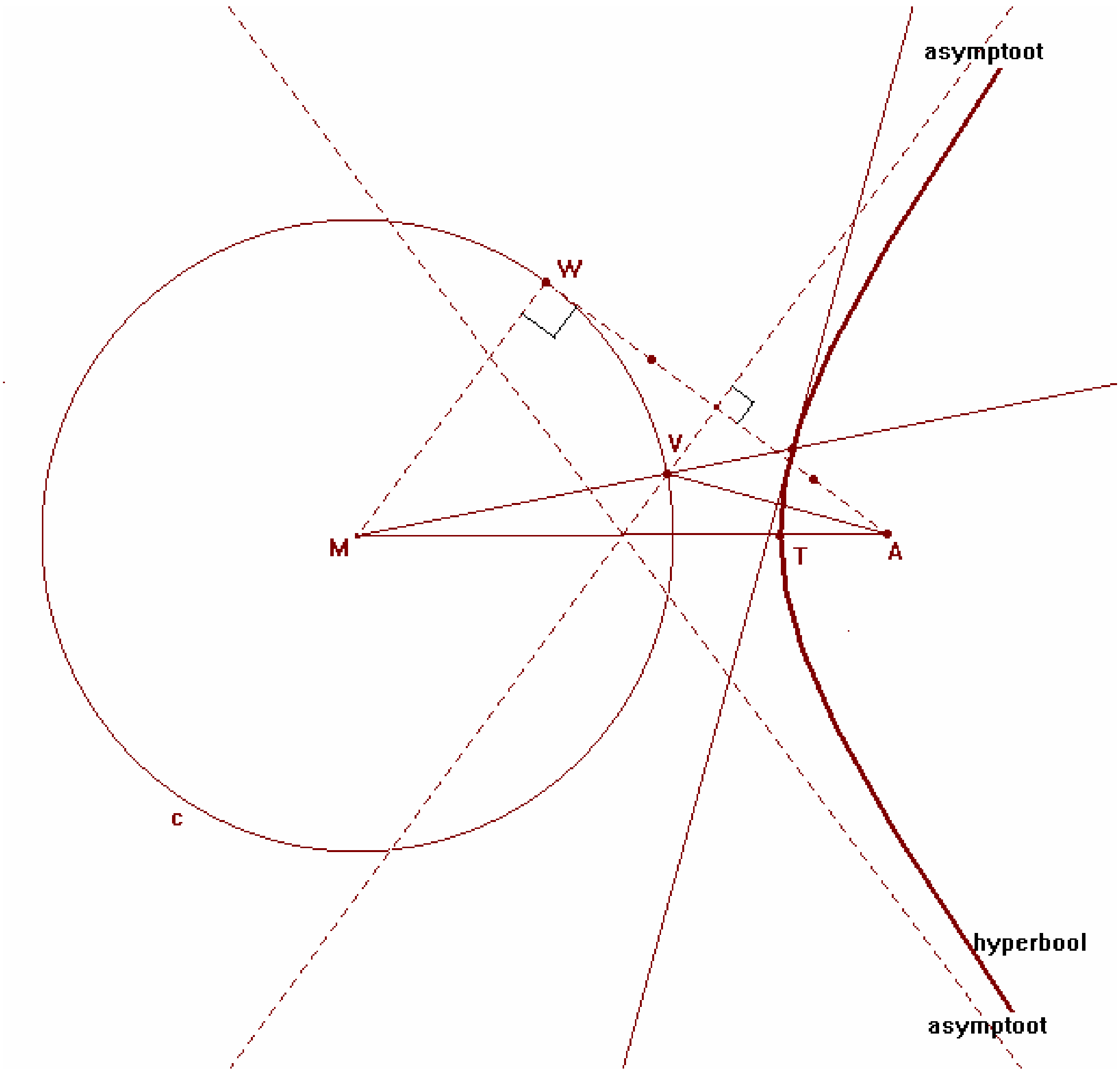


a. $\left.\begin{array}{l} MV \perp FV \text{(gegeven raaklijn)} \\ m \perp VF\,(middelloodlijn) \end{array}\right\} \Rightarrow MV\,//\,m \Rightarrow$ MV heeft geen snijpunt met m.

b. De andere asymptoot krijgen we door de situatie boven *MF* te spiegelen in lijn *MF*.

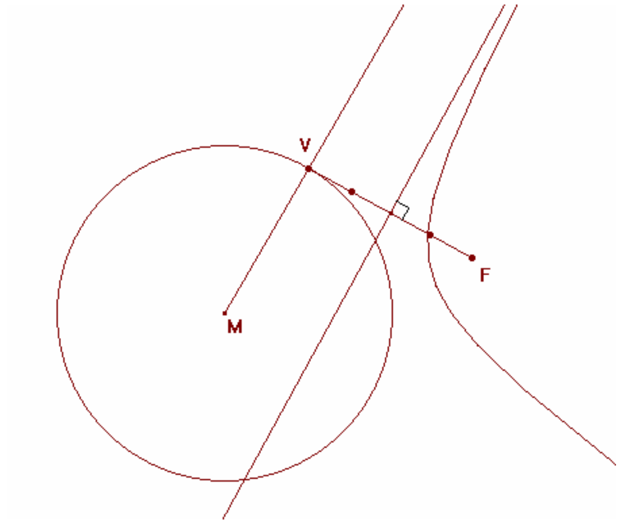
c. De twee symmetrieassen zijn *MF* en de m.l.l. van *MF*.

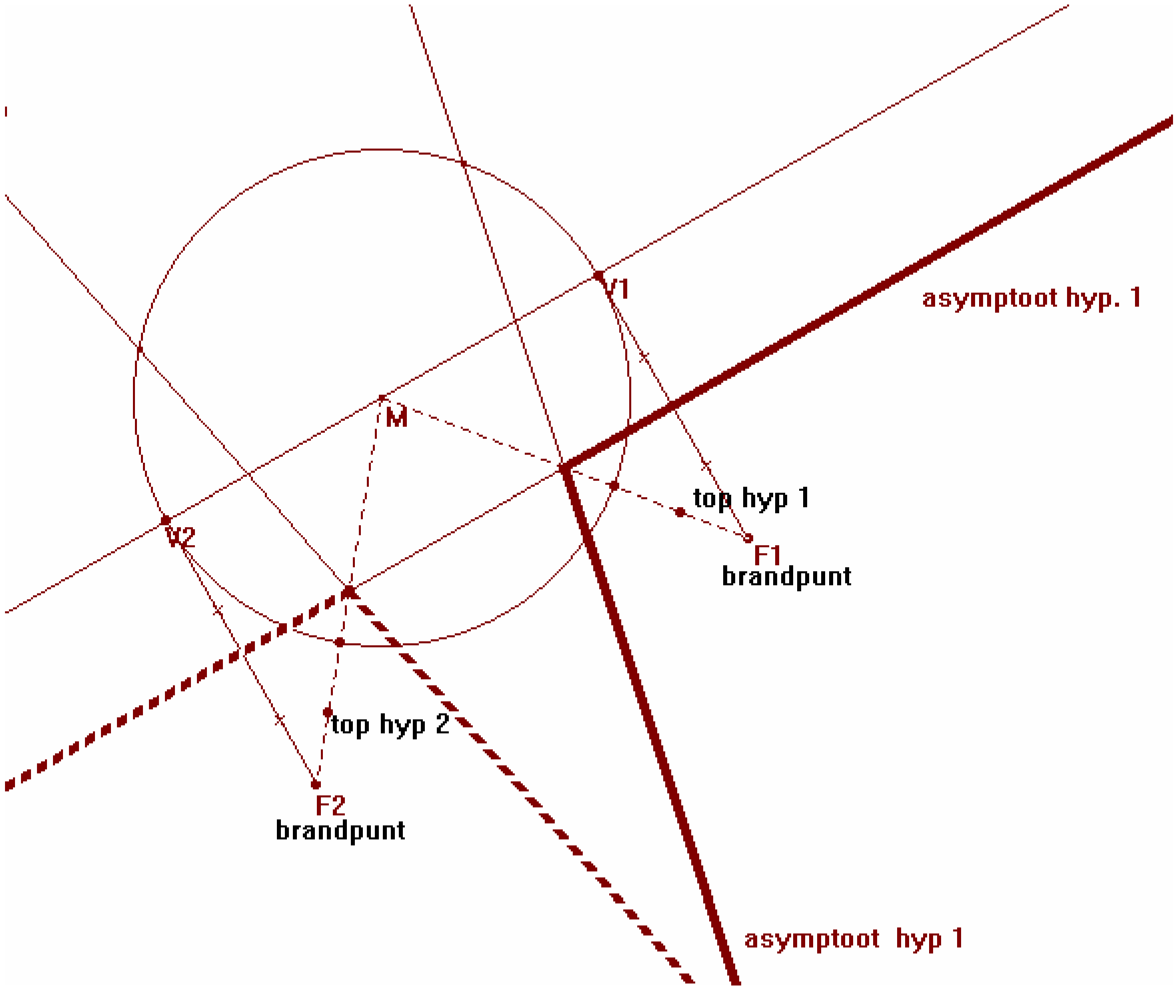
17.



De asymptoot wordt verkregen door de raaklijn aan de cirkel te tekenen . Dit geeft punt $W \Rightarrow$ De asymptoot is de m.l.l. van *AW*. De andere asymptoot krijg je door te spiegelen in de lijn *AM.*
Met de basisconstructie, zoals te zien bij punt *V* kunnen we een aantal punten van de hyperbool construeren.

18. Bekijk eerst de hulpfiguur.
We zien vanuit brandpunt F een raaklijn loodrecht op de straal van de cirkel.
Vervolgens is de m.l.l. van VF de asymptoot van de hyperbool.





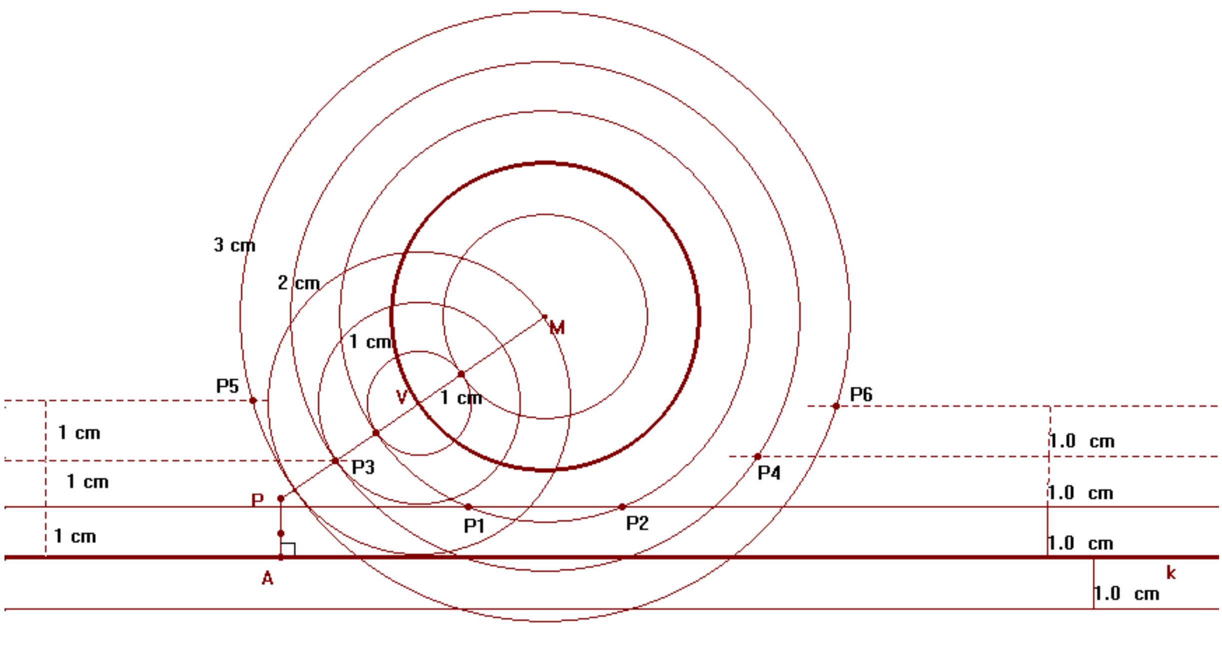
Nu moeten we andersom redeneren.
De asymptoot is de m.l.l. van V_1 met het brandpunt . We moeten dus eerst V_1 spiegelen in de asymptoot . Zo krijgen we het brandpunt F_1 . Ga nu F_1 met M verbinden. Hier komt de top op te liggen. Aangezien de asymptoten gespiegeld zijn t.o.v. de lijn MF_1 , moeten we dus de tweede asymptoot verkrijgen door te spiegelen in $MF_1 \Rightarrow$ de tweede asymptoot van hyp. 1.
(Zie in de figuur de dikgedrukte halve lijnen)
Op dezelfde manier kunnen we vanuit V_2 werken om de dikgestippelde asymptoten en het brandpunt F_2 te verkrijgen.

19

a. Bij een ellips gaat deze regel op. We krijgen dan: de meetkundige plaats van de punten P met $d(P,F) = d(P,c)$ valt geheel samen met de ellips met brandpunt F en richtcirkel c.

b. Bij een hyperbool geldt deze regel niet. We krijgen namelijk: de meetkundige plaats van de punten P met $d(P,F) = d(P,c)$ valt voor 1 tak samen met de hyperbool met brandpunten F en M ,waarbij M het m.p. is van de richtcirkel c.

20a.



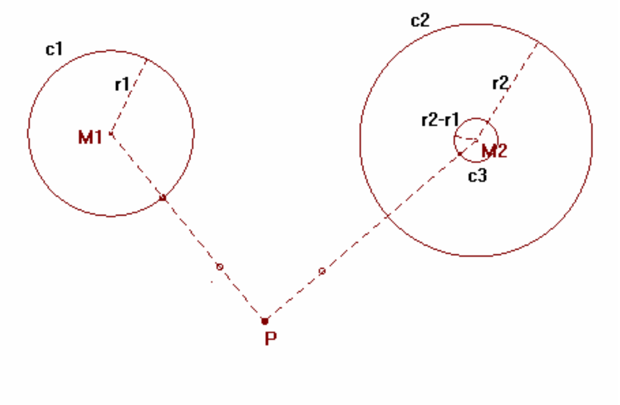
a. De punten P_1 en P_2 hebben een afstand 1 tot de gegeven cirkel en tot lijn k.

b. De punten P_3 en P_4 hebben een afstand 2 tot de gegeven cirkel en tot lijn k.
De punten P_5 en P_6 hebben een afstand 3 tot de gegeven cirkel en tot lijn k.

c. De conflictlijn is waarschijnlijk een parabool.

21a. Gegeven de cirkels c_1 met m.p. M_1 en straal r_1 en c_2 met m.p. M_2 en straal r_2. De cirkels hebben geen snijpunt en liggen niet binnen elkaar.

Te bew. De conflictlijn van c_1 en c_2 is een tak van een hyperbool.



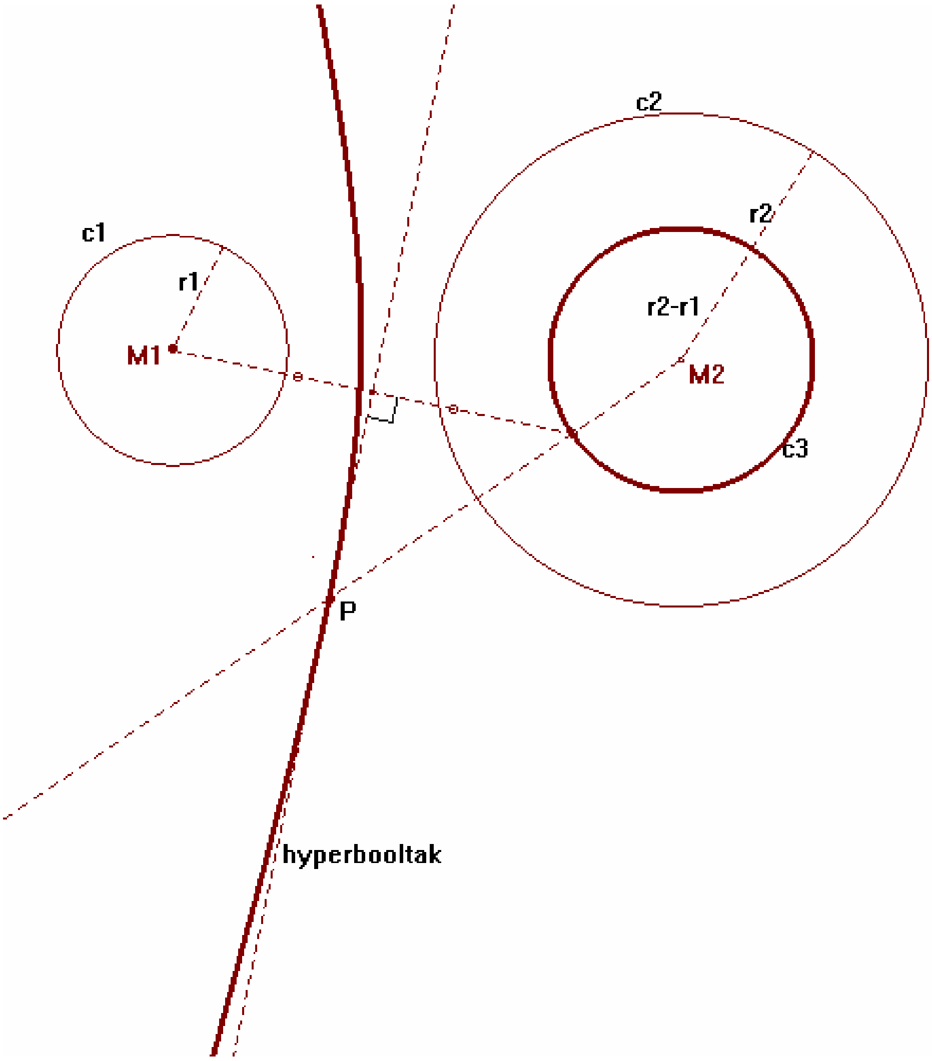
Bew. Teken een punt P met $d(P,c1) = d(P,c2)$ en teken ook de cirkel c3 met het middelpunt M_2 en straal $r_2 - r_1$. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,c1) = d(P,M_1) - r_1 \\ d(P,c2) = d(P,M_2) - r_2 \\ d(P,c1) = d(P,c2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d(P,M_1) - r_1 = d(P,M_2) - r_2 \;\Rightarrow$$

$d(P,M_1) = d(P,M_2) + r_1 - r_2 = d(P,M_2) - (r_2 - r_1) = d(P,c3) \Rightarrow P$ ligt op de hyperbooltak met richtcirkel *c3* en brandpunt M_1.

b.



We passen de basisconstructie toe op brandpunt M_1 en richtcirkel *c3*. Dit is dan de conflictlijn van *c1* en *c2*.

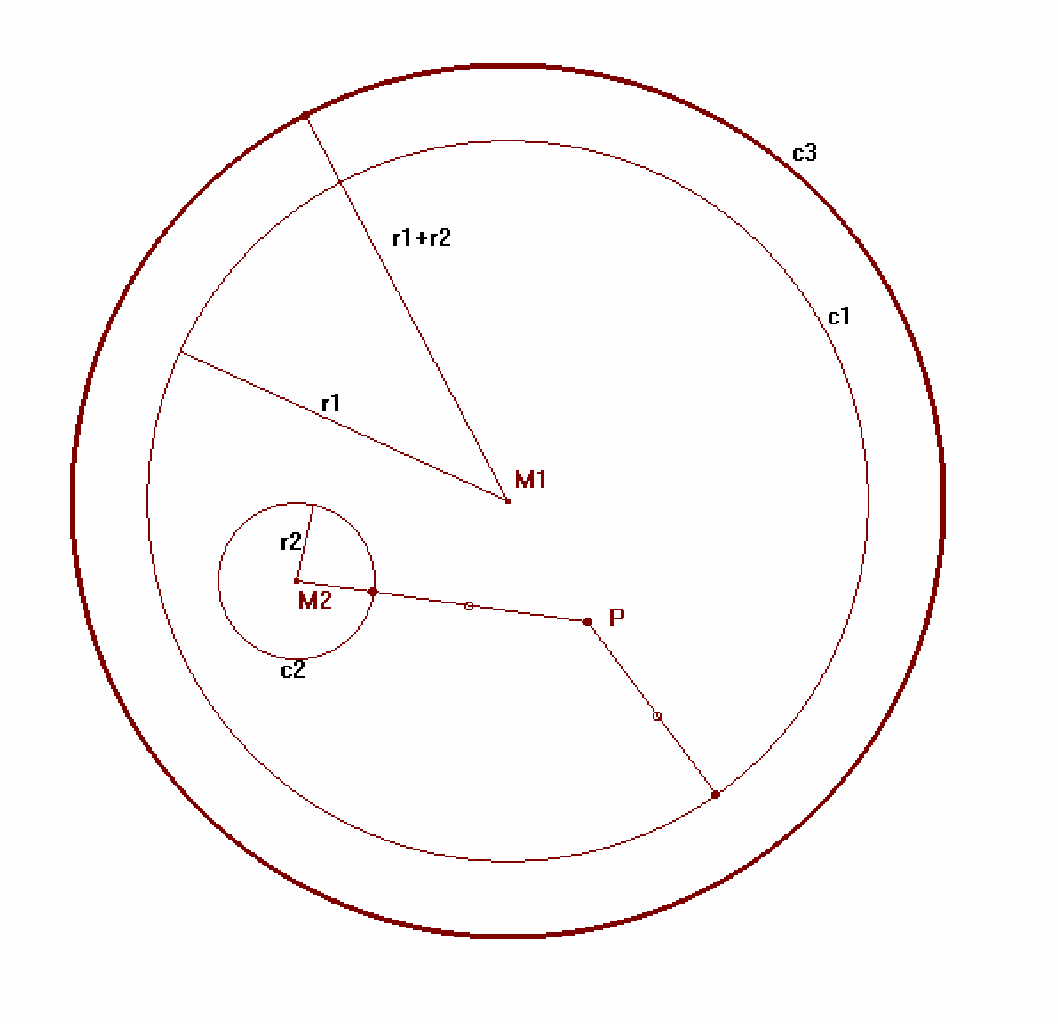
22a. Gegeven de cirkel *c1* met m.p. M_1 en straal r_1 en cirkel *c2* met m.p. M_2 en straal r_2 zodanig dat cirkel *c2* helemaal binnen cirkel *c1* ligt.

Te bew. De conflictlijn van *c1* en *c2* is een ellips.

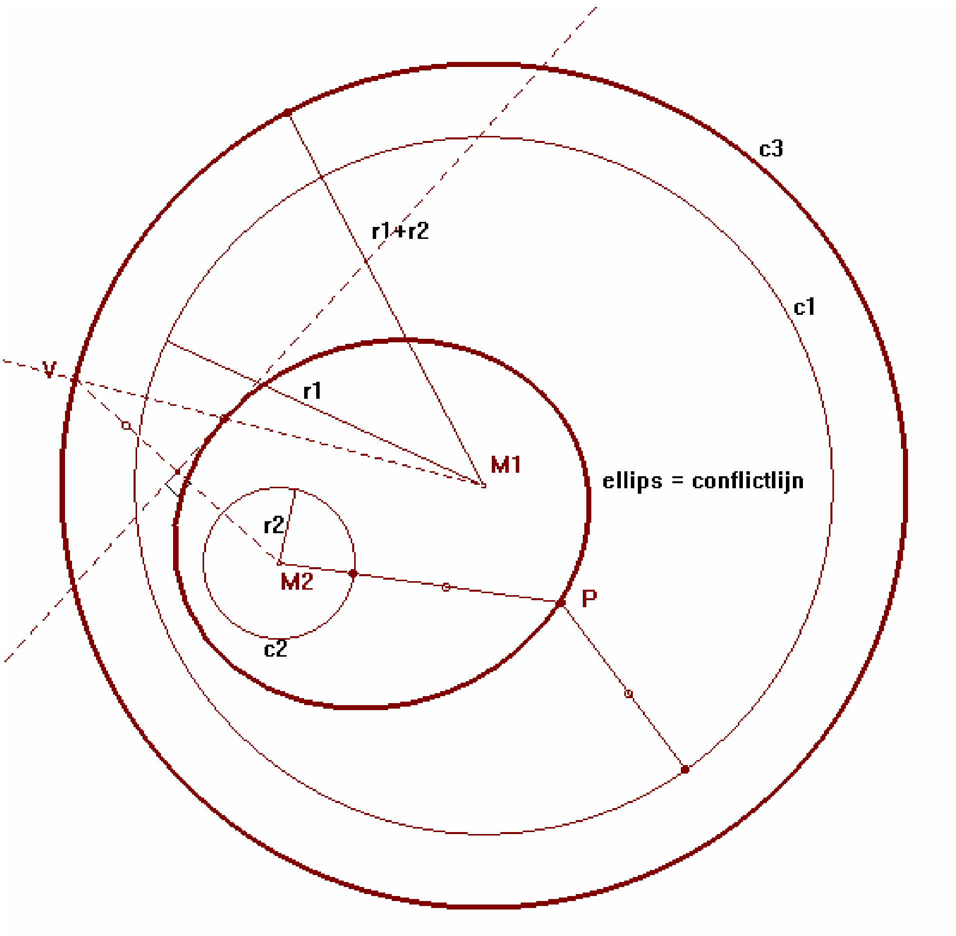
Bewijs: Zie de figuur. Teken punt P met $d(P,c1) = d(P,c2)$ Net zoals in de vorige opdracht gaan we weer een hulpcirkel maken . In dit geval cirkel *c3* met m. p. *c3* en straal $r_1 + r_2$. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,c_1) = r_1 - d(P,M_1) \\ d(P,c_2) = d(P,M_2) - r_2 \\ d(P,c_1) = d(P,c_2) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,M_2) - r_2 = r_1 - d(P,M_1) \Leftrightarrow d(P,M_2) = r_1 + r_2 - d(P,M_1) \Rightarrow$$

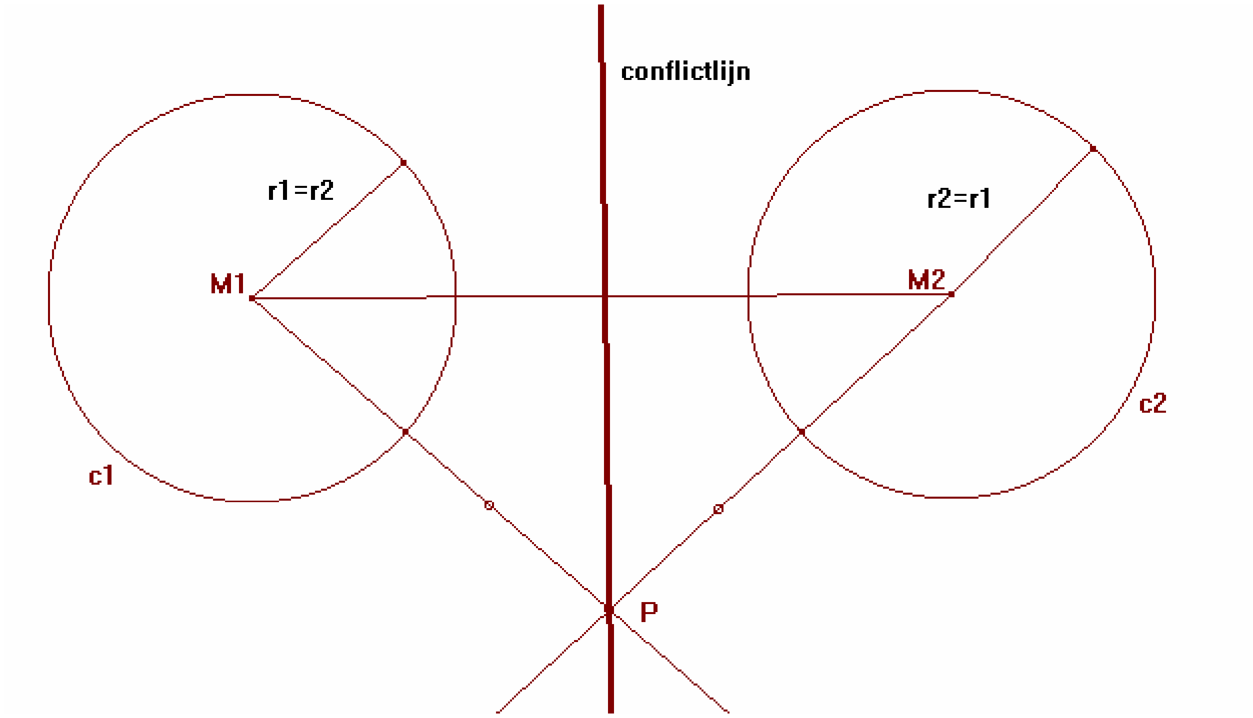
$d(P,M_2) = d(P,c_3) \Rightarrow P$ ligt op de ellips met richtcirkel c_3 en brandpunt M_2


c3
r1+r2
c1
r1
M1
r2
M2
P
c2

22b.


c3
r1+r2
c1
V
r1
M1
ellips = conflictlijn
r2
M2
P
c2

23a.



De conflictlijn van c_1 en c_2 is de m.l.l. van M_1M_2.

Geg. 2 cirkels c_1 en c_2 met gelijke straal en middelpunten M_1 en M_2. De cirkels hebben geen snijpunten en zijn niet concentrisch.

Te bew. de conflictlijn van c_1 en c_2 is de m.l.l. van M_1M_2.

Bewijs: Teken het punt P waarvoor geldt: $d(P,c_1)=d(P,c_2)$ Zie de figuur $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,M_1)=d(P,c_1)+r_1 \\ d(P,M_2)=d(P,c_2)+r_2 \\ d(P,M_1)=d(P,M_2) \\ r_1=r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,M_1)=d(P,M_2) \Rightarrow \text{punt } P \text{ ligt op de m.l.l. van } M_1M_2.$$

b. Gegeven twee concentrische cirkels met m.p. $M_1 = M_2$ en $r_2 > r_1$

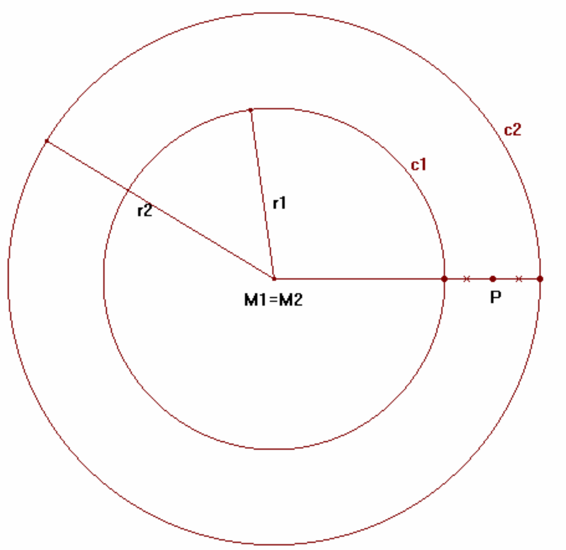
te bew. de conflictlijn is de cirkel met m.p. M_1 en straal $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$

Bewijs: Teken een punt P met $d(P,c_1)=d(P,c_2)$

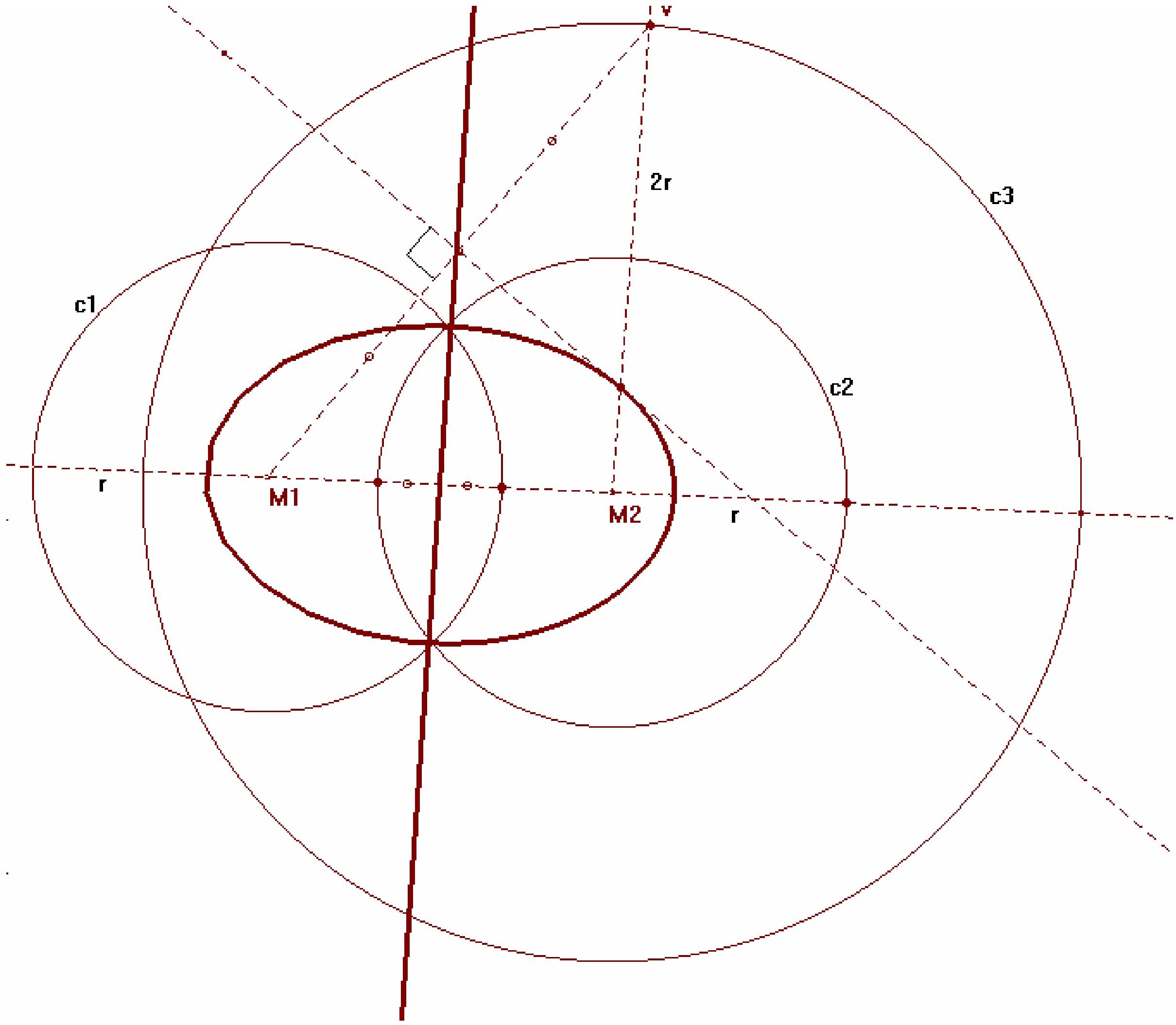
$$\left.\begin{array}{l} d(P,c_1)=d(P,M_1)-r_1 \\ \Rightarrow d(P,c_2)=r_2-d(P,M_1) \\ d(P,c_1)=d(P,c_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$d(p,M_1)-r_1=r_2-d(P,M_1) \Leftrightarrow 2.d(P,M_1)=r_1+r_2$

$\Leftrightarrow d(P,M_1)=\frac{1}{2}(r_1+r_2) \Rightarrow$ de conflictlijn is de cirkel met m.p. M_1 en straal $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$



24a.



Voor alle punten in het tussengebied van de 2 cirkels en het gebied buiten de 2 cirkels is de conflictlijn de m.l.l. van het lijnstuk gelegen op de verbindingslijn van M_1M_2 tussen de 2 cirkels.
Voor de punten binnen c_1 en buiten c_2 geldt:
Noem P een punt van de conflictlijn van c_1 en $c_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,c_1)=d(P,c_2) \\ d(P,c_1)=r_1-d(P,M_1) \\ d(P,c_2)=d(P,M_2)-r_2 \\ r_1=r_2=r \end{array}\right\} \Rightarrow r-d(P,M_1)=d(P,M_2)-r \Leftrightarrow d(P,M_1)+d(P,M_2)=2r \Rightarrow \text{de}$$

gevraagde conflictlijn is een ellips en die verkrijgen we dus door de cirkel c_3 te nemen met m.p. M_2 en straal $2r$ en neem punt M_1 als brandpunt. Pas hier de “bekende constructie “ toe om de gevraagde conflictlijn te construeren. Zie de figuur hierboven. Voor de punten binnen c_2 en buiten c_1 passen we hetzelfde systeem toe.

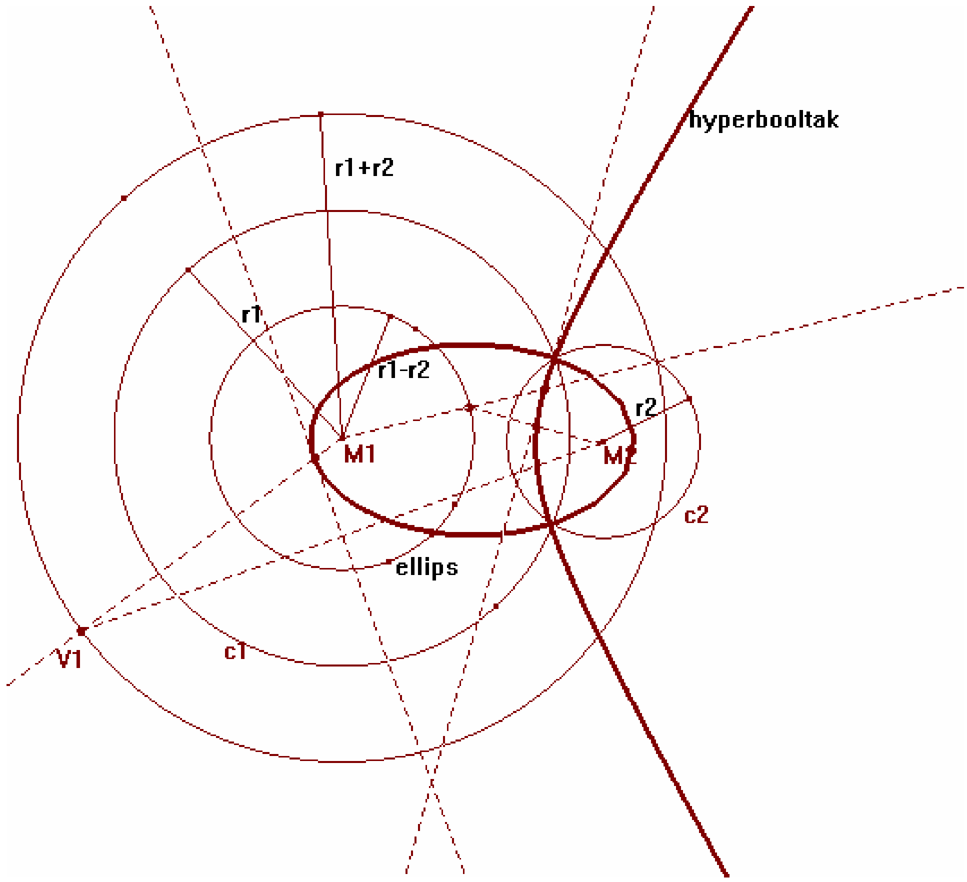
b. Voor de punten binnen c_1 en buiten c_2 geldt:
Noem P een punt van de conflictlijn van c_1 en $c_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,c_1)=d(P,c_2) \\ d(P,c_1)=r_1-d(P,M_1) \\ d(P,c_2)=d(P,M_2)-r_2 \\ r_1>r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1-d(P,M_1)=d(P,M_2)-r_2 \Leftrightarrow d(P,M_1)+d(P,M_2)=r_1+r_2$$

Dit geeft dus een ellips met brandpunt M_2 en richtcirkel c_3 met m.p. M_1 en straal $r_1 + r_2$.
Voor de punten binnen c_2 en buiten c_1 geldt op dezelfde manier :
$d(P,M_1)+d(P,M_2)=r_1+r_2$ Dit is dus voor die punten een ellips met brandpunten M_1 en M_2.
Voor de punten binnen beide cirkels geldt:
Stel P is een punt van de conflictlijn dan geldt:

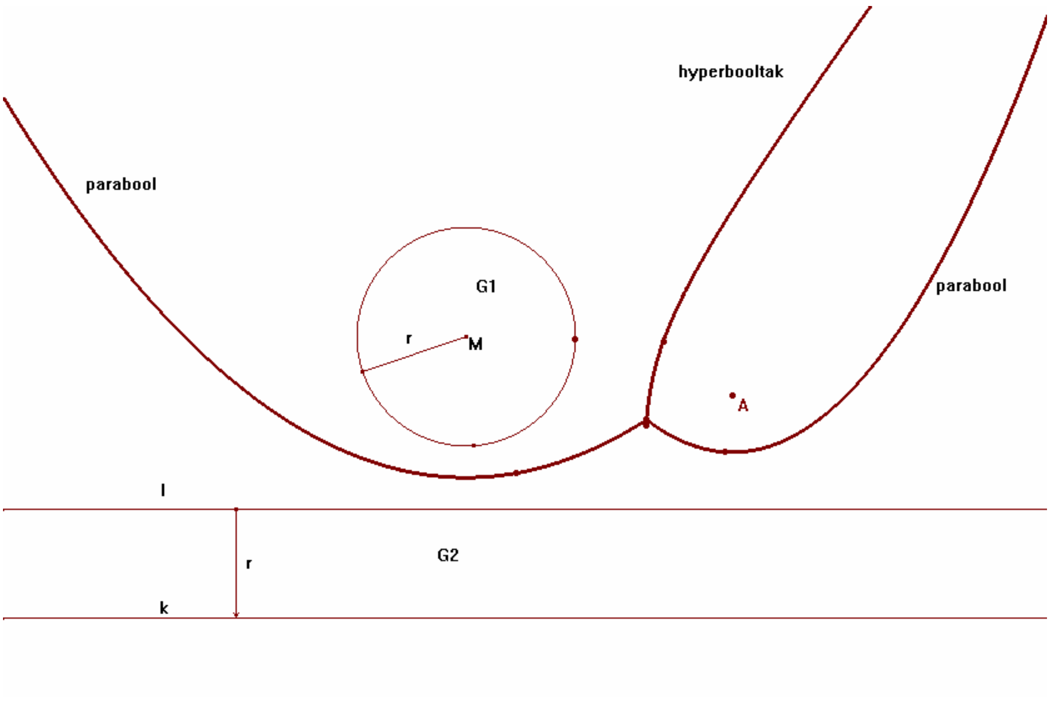
$$\left.\begin{array}{l} d(P,c_1)=d(P,c_2) \\ d(P,c_1)=r_1-d(P,M_1) \\ d(P,c_2)=r_2-d(P,M_2) \\ r_1>r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1-d(P,M_1)=r_2-d(P,M_2) \Leftrightarrow d(P,M_1)-d(P,M_2)=r_1-r_2$$

Voor de punten buiten beide cirkels geldt min of meer hetzelfde systeem dan krijgen we :
$d(P,M_1)-d(P,M_2)=r_1-r_2$ Dit geeft dus een tak van een hyperbool met brandpunt M_2 en richtcirkel de cirkel met m.p. M_1 en straal $r_1 - r_2$.



25.

De conflictlijn van G_1 en G_2 is een parabool met brandpunt M en richtlijn k , waar bij k ligt op een afstand r van lijn l.
De conflictlijn van punt A tot G_2 is ook een parabool. Deze heeft brandpunt A en richtlijn l.
De conflictlijn van punt A en G_1 is een hyperbooltak met richtcirkel de rand van gebied G_1 en brandpunt A.



26. Zie de figuur op blz. 155 van het boek.

a. We tekenen de cirkel met m.p. B die door punt A gaat. Nu geldt:

$$\left.\begin{array}{l} d(B,G1)=d(B,c_1)=d(B,A) \\ d(B,A)=d(B,G2) \text{ want B ligt op de parabool} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ de afstanden zijn dus gelijk met straal } BA.$$

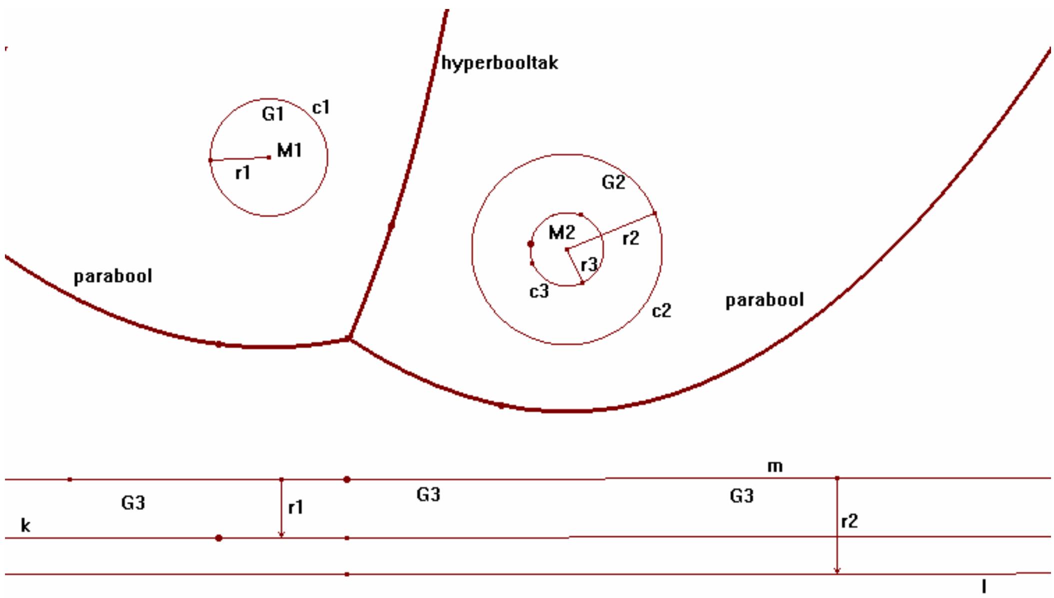
$\Rightarrow$ de cirkel raakt aan G2 , G1 en gaat door A.

b. C is het rechtse snijpunt van de hyperbool en de parabool waarvoor geldt C is het m.p. van een cirkel die G2 raakt $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d(C,G2)=d(C,A) \text{ want C ligt op de parabool} \\ d(C,G2)\ \ =d(C,G1) \text{ want C ligt ook op de hyperbool} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{C heeft dus gelijke afstanden naar}$$

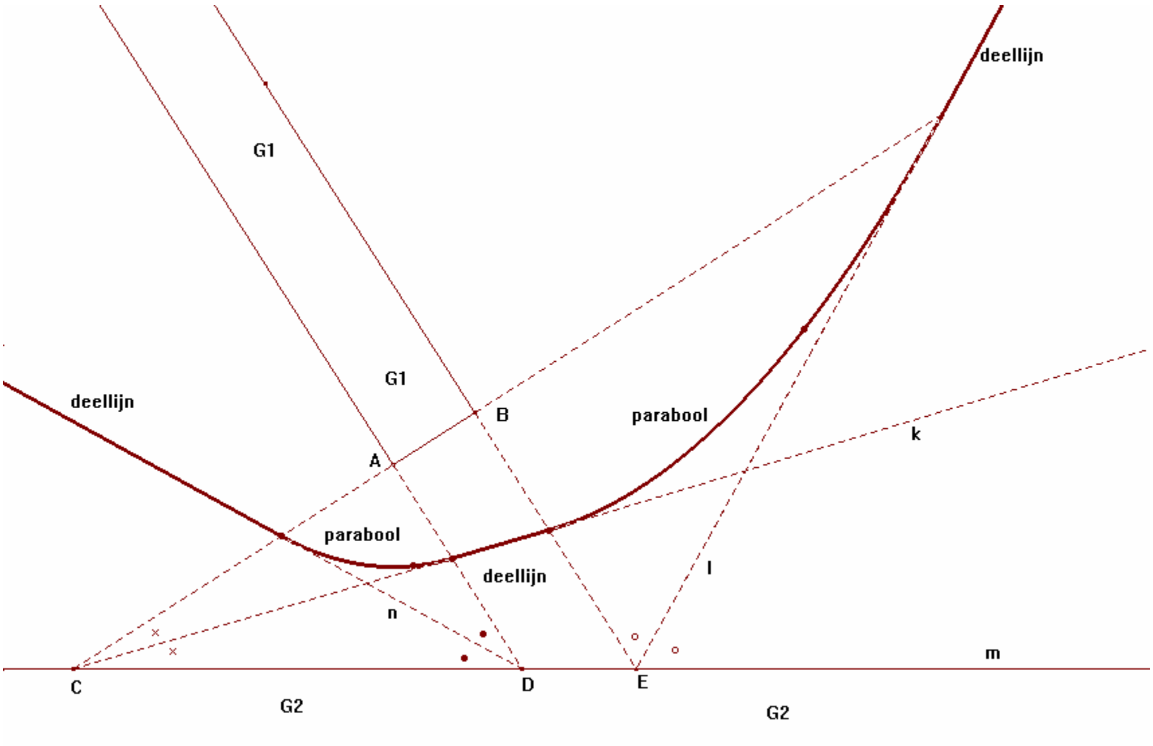
G1 , G2 en naar $A \Rightarrow$ De cirkel met m.p. C raakt G1 , G2 en gaat ook door A.

27.



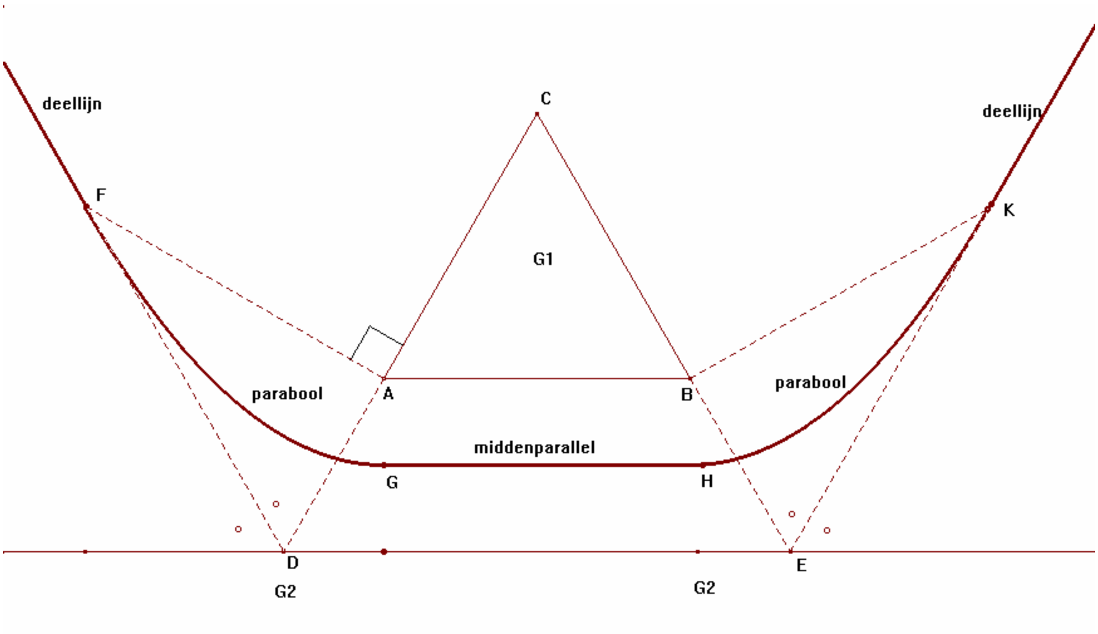
De conflictlijn van G1 en lijn *m* is de parabool met brandpunt M_1 en richtlijn *k*.
De conflictlijn van G2 en *m* is de parabool met brandpunt M_2 en richtlijn *l*.
De conflictlijn van G1 en G2 is de hyperbool met brandpunt M_1 en richtcirkel c_3 met middelpunt M_2 en straal $r_3 = r_2 - r_1$

28ab.



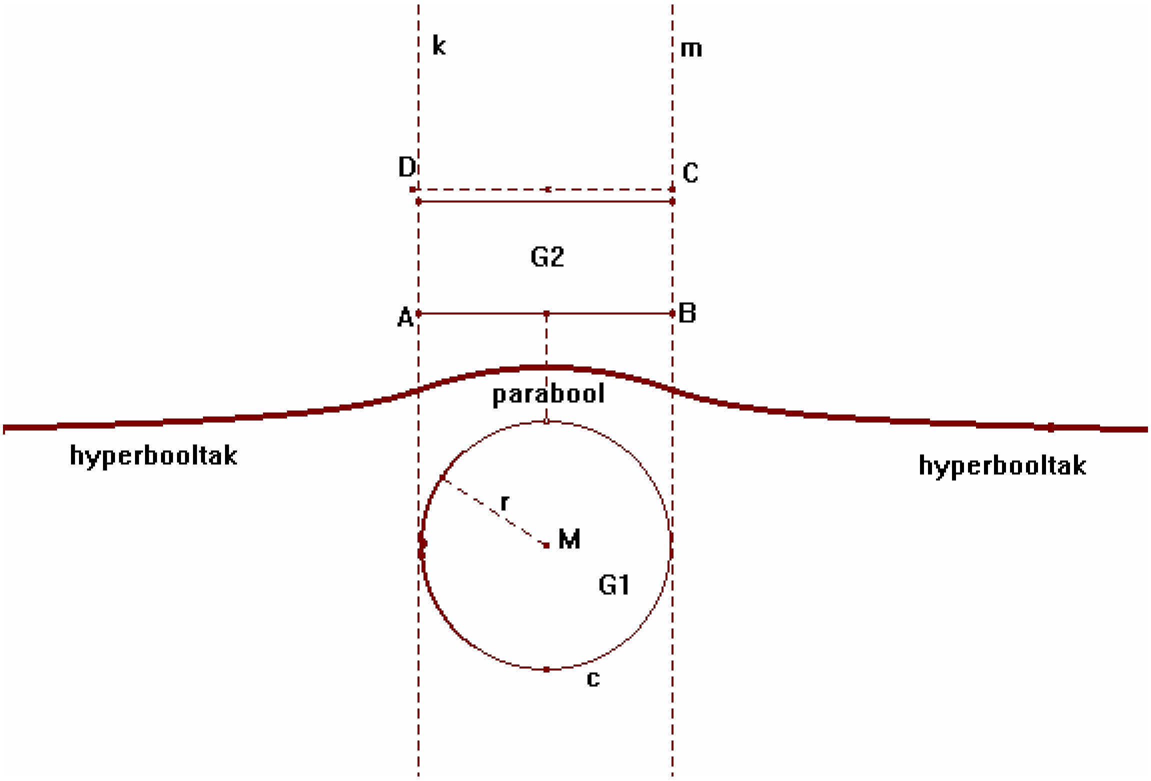
De conflictlijn van de linkerkant van G1 en G2 is een deel van de deellijn uit hoek *D*.
De conflictlijn van punt *A* en G2 is een deel van de parabool met brandpunt *A* en richtlijn *m*.
De conflictlijn van de onderkant van G1 en G2 is een deel van de deellijn uit hoek *C*.
De conflictlijn van punt *B* en G2 is een deel van de parabool met brandpunt *B* en richtlijn *m*.
De conflictlijn van de rechterkant van G1 en G2 is een deel van de deellijn uit hoek *E*.

29.



De conflictlijn van *AC* en G2 is een deel van de deellijn uit hoek *D*.
De conflictlijn van *A* en G2 is een deel van de parabool met brandpunt *A* en richtlijn *DE*.
De conflictlijn van *AB* en G2 is de middenparallel *GH*.
De conflictlijn van *B* en G2 is een deel van de parabool met brandpunt *B* en richtlijn *DE*.
De conflictlijn van *BC* en G2 is een deel van de deellijn uit hoek *E*.

30.



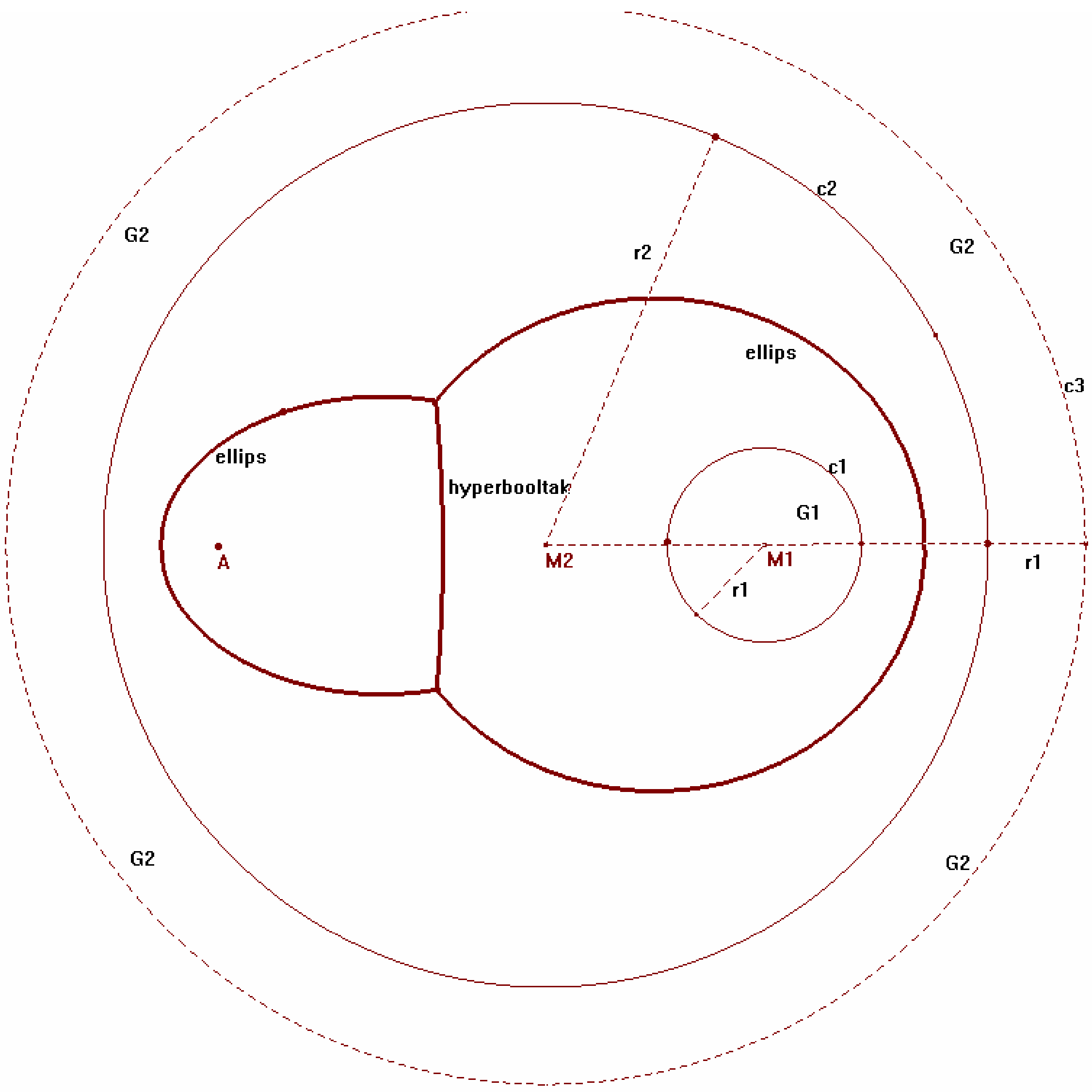
Gegeven de rechthoek G2 en de cirkel c zodat de cirkel raakt aan de stippellijnen *k* en *m*.

De conflictlijn van punt *A* en de cirkel c is een hyperbooltak met brandpunt *A* en richtcirkel c.
De conflictlijn van *AB* en G2 is een deel van de parabool met brandpunt *M* en richtlijnstuk *CD* , waarbij *CD* op een afstand *r* ligt van *AB*.
De conflictlijn van punt *B* en de cirkel c is een hyperbooltak met brandpunt *B* en richtcirkel c.

31.

Zie de figuur hieronder:
Gegeven het punt *A* en het gebied G_1 gevormd door de cirkel c1 met mp. M_1 en straal r_1 en het gebied G_2 , dat is het buitengebied van cirkel c_2 met m.p. M_2 en straal r_2.

De conflictlijn van punt *A* en gebied G1 is een deel van de hyperbooltak met brandpunt *A* en richtcirkel c_1.
De conflictlijn van *A* en gebied G2 is een deel van de ellips met brandpunt *A* en richtcirkel c_2.
De conflictlijn van G1 en G2 is een ellips met brandpunt M_2 en richtcirkel c_3 , waarbij c_3 m.p. M_2 heeft en straal $r_3 = r_2 + r_1$.

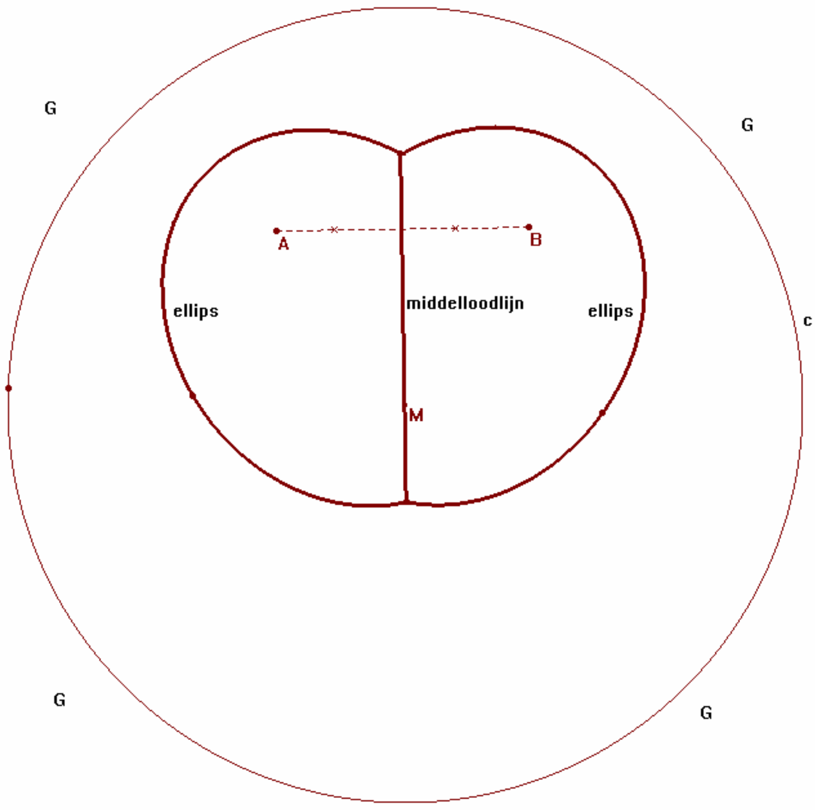


32. Gegeven zijn de punten *A* en *B* en het gebied G.

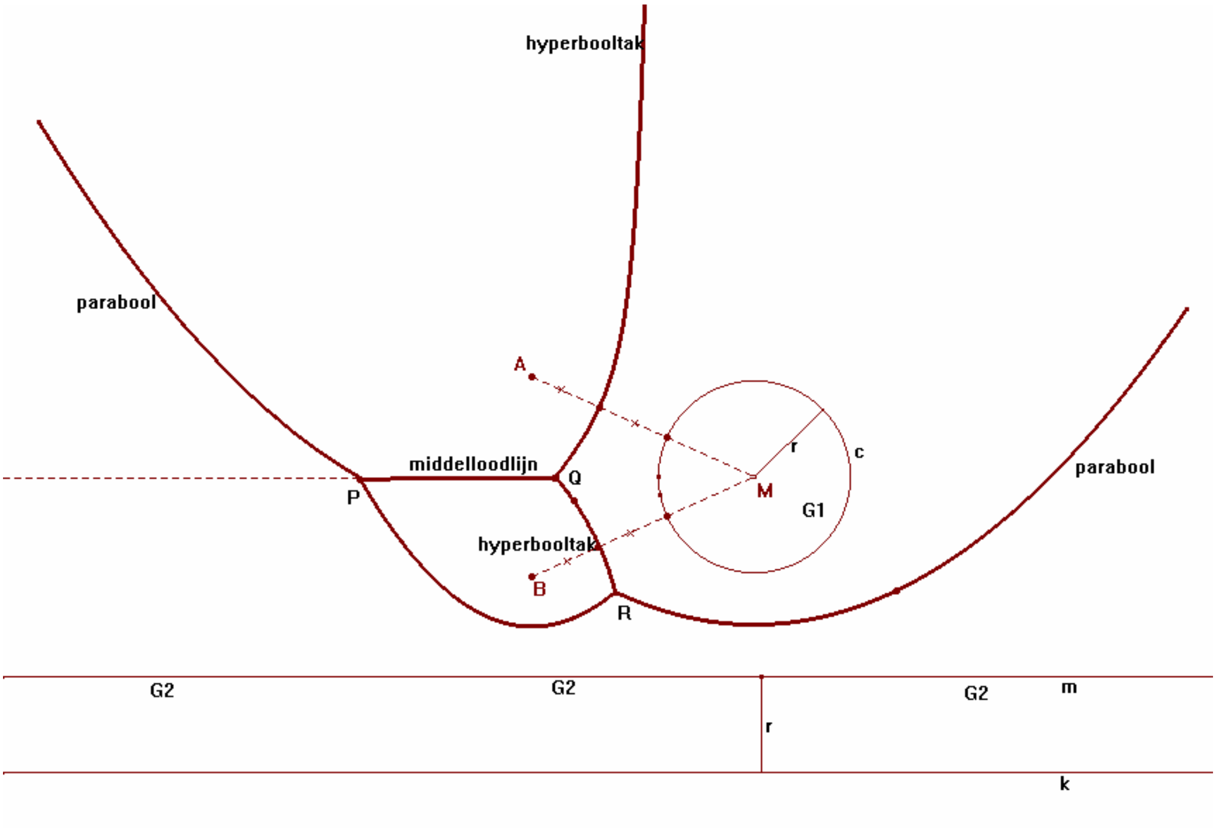
De conflictlijn van cirkel c en punt *A* is een deel van de ellips met brandpunt *A* en richtcirkel c.

De conflictlijn van cirkel c en punt *B* is een deel van de ellips met brandpunt *B* en richtcirkel c.

De conflictlijn van *A* en *B* is een deel van de middelloodlijn van het lijnstuk *AB*.



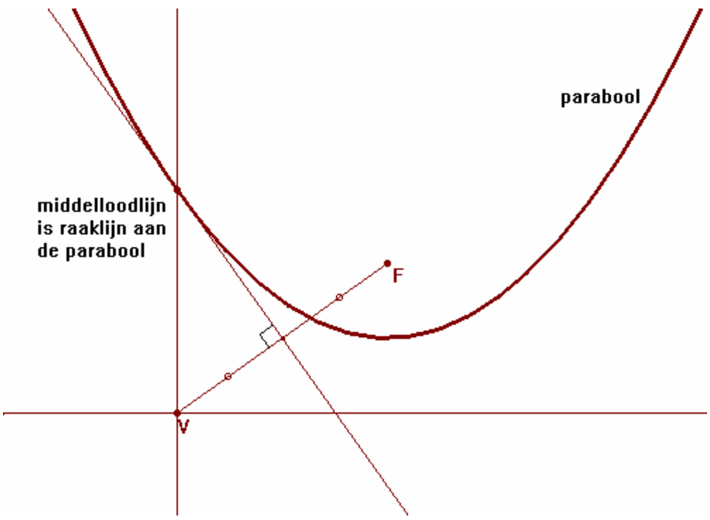
33.



Zie de figuur: Gegeven de punten *A* en *B* die recht boven elkaar liggen. Punt *M* van de cirkel G_1 ligt tussen *A* en *B* in. Verder hebben we de grenslijn *m* van het gebied G_2.

De conflictlijn van G_1 en G_2 is een deel van de parabool met brandpunt *M* en richtlijn de lijn *k* op afstand *r* van lijn *m*.
De conflictlijn van punt *A* en G_1 is een deel van de hyperbooltak met brandpunt *A* en richtcirkel c.
De conflictlijn van punt *B* en G_2 is een deel van de hyperbooltak met brandpunt *B* en richtcirkel c.
De conflictlijn van de punten *A* en *B* is een deel van de middelloodlijn van het lijnstuk *AB.*
De conflictlijn van punt *B* en G_2 is een deel van de parabool met brandpunt *B* en richtlijn *m*.
De conflictlijn van punt *A* en G_2 is een deel van de parabool met brandpunt *A* en richtlijn *m*.

34a. Zie figuur

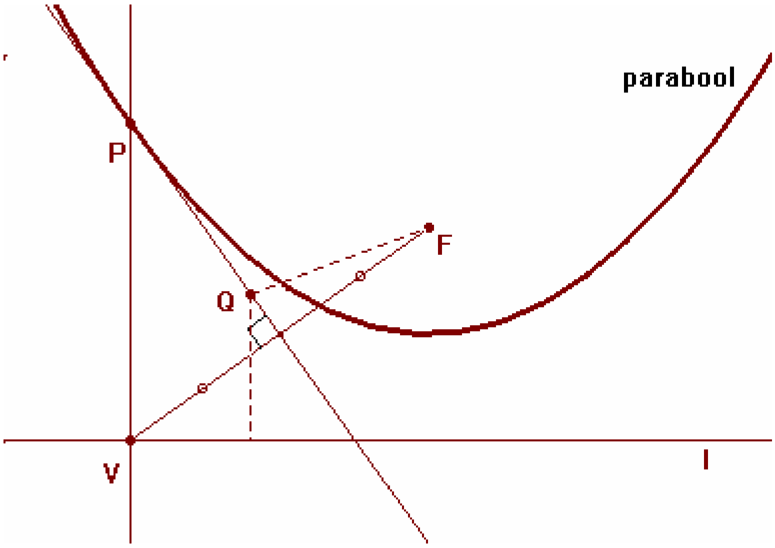


b. Vermoeden: De middelloodlijn is tevens raaklijn aan de parabool

c. Vermoeden: Ook bij een ellips is de middelloodlijn raaklijn aan de ellips.
Bij de hyperbool is de m.l.l. waarschijnlijk ook een raaklijn aan de hyperbool.

35.

a. Gegeven een parabool met brandpunt *F* en richtlijn *l*. Verder ligt punt *P* op de parabool en punt *Q* op de m.l.l. van *VF*.



Te bew.
$(Q,l) < d(Q,F)$

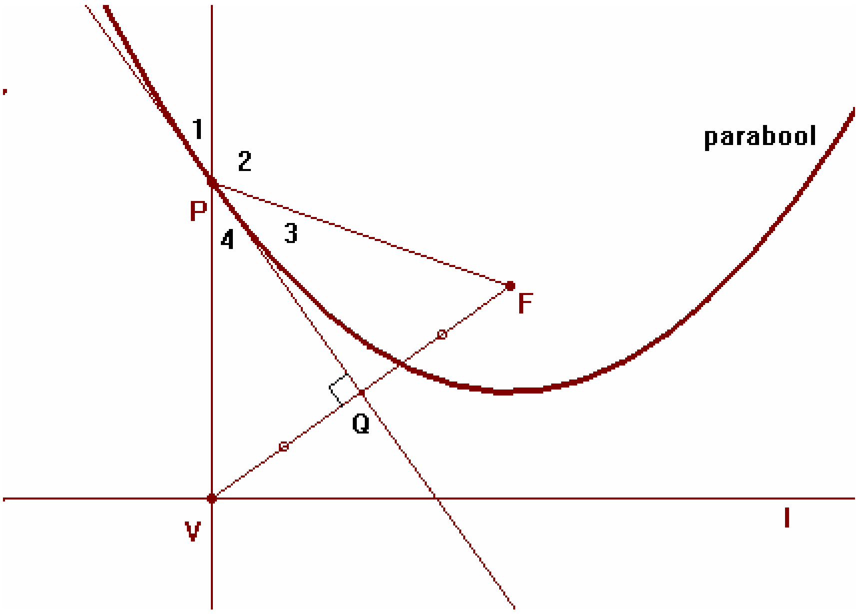
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} d(Q,l) < d(Q,V) \text{ (afstand van punt tot lijn is kortste verbindingsstuk)} \\ d(Q,F) = d(Q,V) \text{ (Q op de middelloodlijn)} \end{array}\right\} \Rightarrow d(Q,l) < d(Q,F) \Rightarrow$$

b. $$\left.\begin{array}{l} \text{Bij een parabool geldt dat afstand tot } l = \text{afstand tot } F \\ \text{Uit a volgt: } d(Q,l) < d(Q,F) \end{array}\right\} \Rightarrow Q \text{ ligt dus buiten de parabool.}$$

36

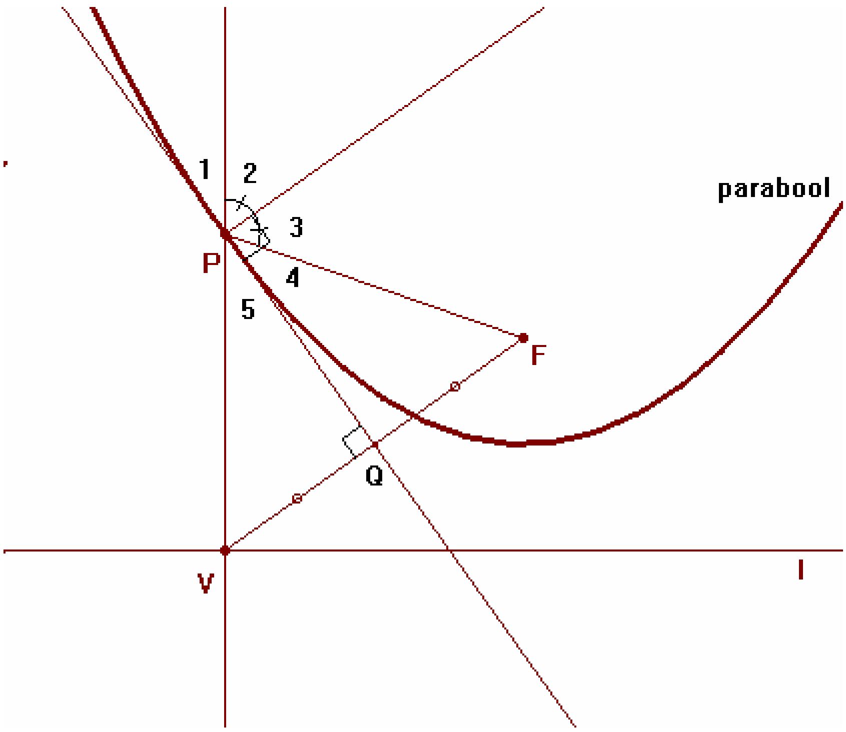
a. Gegeven is dat *P* op de parabool ligt met brandpunt *F* en richtlijn *l*.



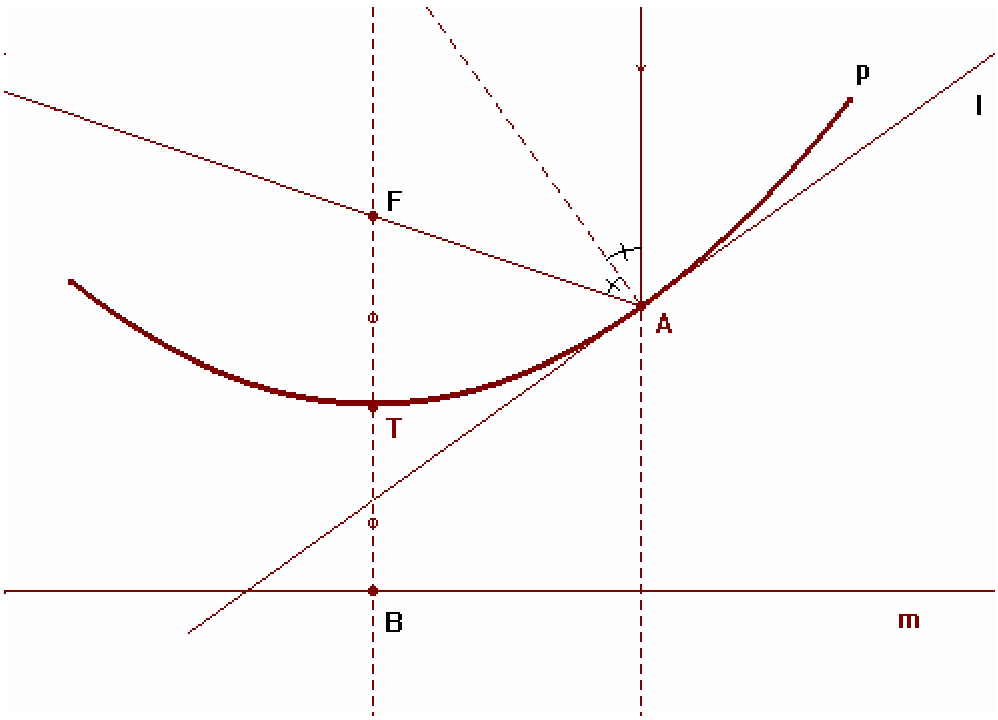
Te bew.
$\angle P_1 = \angle P_3$

Bewijs: $$\left.\begin{array}{l} \angle P_1 = \angle P_4 \text{(overstaande hoeken)} \\ \angle P_3 = \angle P_4 \text{(door de parabooldefinitie is } \Delta\text{PFV gelijkbenig} \\ \text{en is de m.l.l. door P tevens deellijn van } \angle P_{34}) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_1 = \angle P_3$$

36b. Zie de figuur hier onder. In dezelfde tekening tekenen we de lijn door $P \perp$ raaklijn in P. De hoeken passen we even aan. De hoek van inval is nu $\angle P_2$ en de hoek van reflectie is $\angle P_3$. De loodlijn op de raaklijn is bissectrice van $\angle\ P_{23}$.



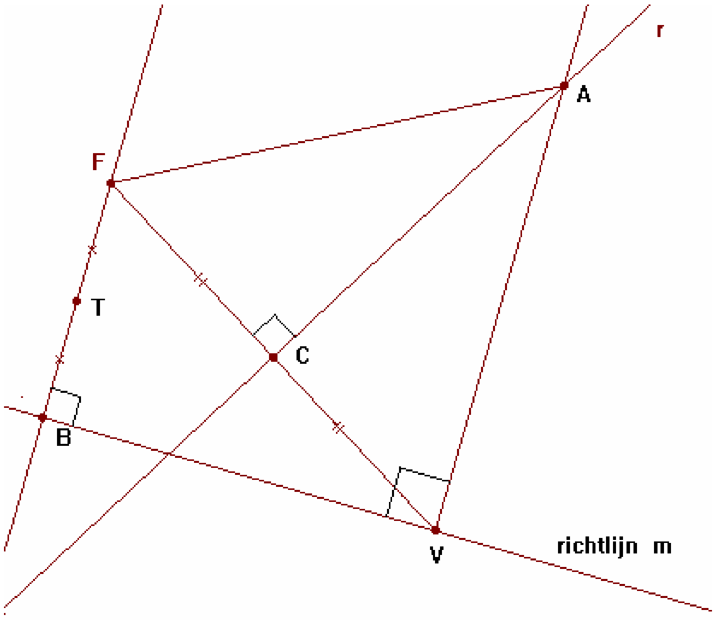
37.



Teken eerst een lijn door A // de as die door de top T gaat. Teken dan de loodlijn in A op de raaklijn l. Gebruik de eigenschap hoek van inval is hoek van reflectie. Het snijpunt met de as is nu dus brandpunt F. Spiegel F nu in $T \Rightarrow$ punt B. Teken nu de richtlijn m door $B \perp$ de as.

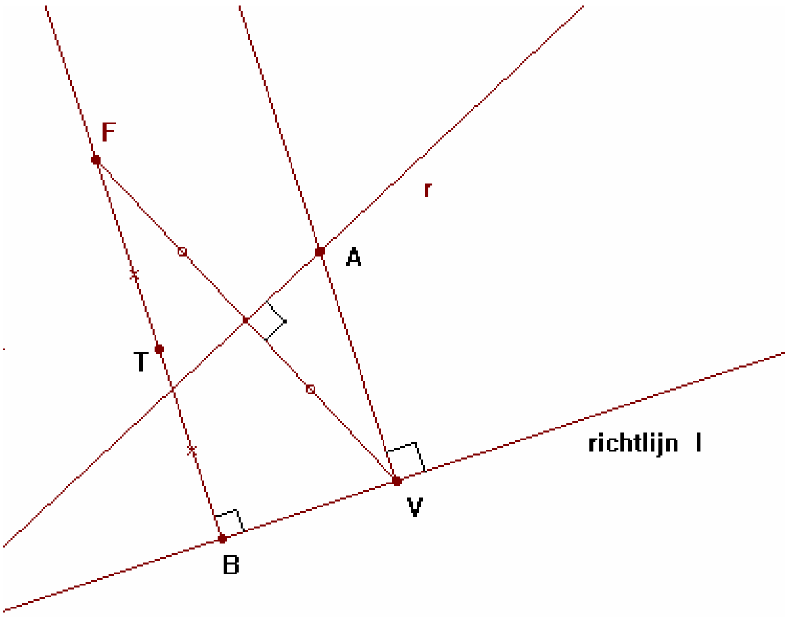
38. Zie onderstaande figuur.
Gegeven punt *A* gelegen op de parabool *p*. Lijn *r* is de raaklijn aan *p* in *A*. Brandpunt is *F*.

Verbind *FA* . Spiegel nu punt *F* in de raak lijn *r* . Dit geeft punt *V*. Dit kan , aangezien raaklijn *r* m.l.l. is van *FV*. (vergelijk dit met de basisconstructie van blz. 159).
De lijn *AV* is evenwijdig met de symmetrieas van de parabool.
V is een punt van de richtlijn loodrecht op *AV*. Teken ook de symmetrieas evenwijdig aan *AV* en door het punt *F*. Dit geeft het punt *B* op de richtlijn. De top *T* is nu het midden van *BF*.



39. Gegeven punt *A* van de parabool *p*. Lijn *r* is raaklijn aan *p* in *A*. Lijn *l* is de richtlijn van de parabool *p*.

Teken eerst de lijn door *A* loodrecht op de richtlijn *l*.
Net als in de vorige opdracht is de raaklijn in *A* ook m.l.l. .
Spiegel punt *V* in *r* . Dit geeft punt *F*. De loodlijn door *A* en *V* is evenwijdig met de symmetrieas. Teken dus de symmetrieas door *F*. Dit geeft punt *B*.
De top *T* is nu het midden van *BF*.

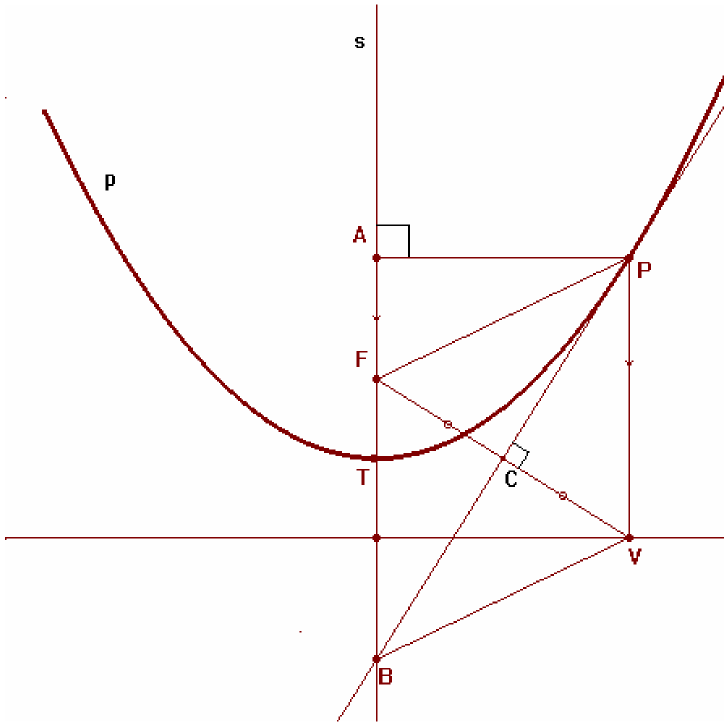


40.

a. Zie de getekende figuur.

b. Gegeven parabool p , brandpunt F , raaklijn PB in P aan parabool p . T is de top. $AP \perp$ symm. as l.

Te bew. vierhoek $BVPF$ is een ruit.



Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} BV = BF\,\text{(raaklijn in P is ook m.l.l. van } VF\text{)} \\ PV = PF\,(parabool) \\ \left.\begin{array}{l} VC = FC\,(m.l.l.) \\ \angle FCB = \angle VCP = 90^\circ\,(m.l.l.) \\ \angle CPV = \angle CBF\,(\text{z} - \text{hoeken want PV//s}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta VCP \cong \Delta FCB(zhh) \Rightarrow PV = FB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$FP = PV = BF = BV \Rightarrow$ vierhoek $BVPF$ is dus een ruit.

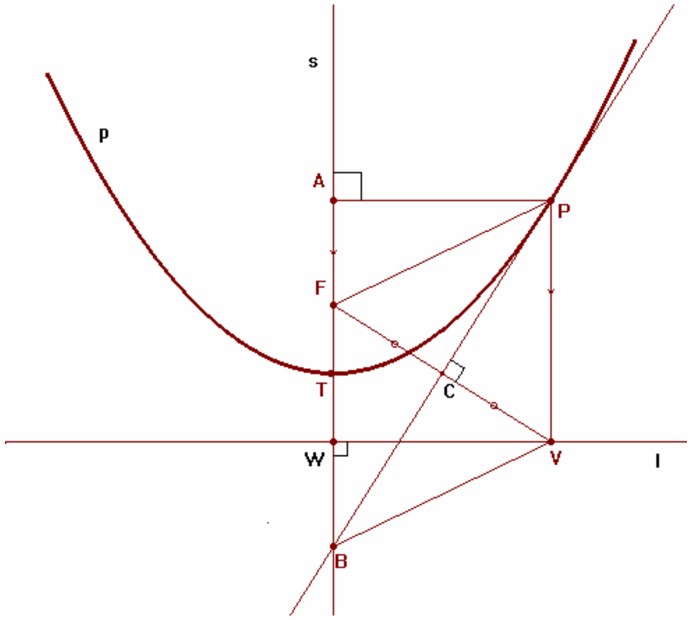
c. Te bew. $AT = BT$

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AP \perp s \\ l \perp s \end{array}\right\} \Rightarrow AP \,//\, WV \\ AW \,//\, PV \end{array}\right\} \Rightarrow WVPA \text{ is een p.g.m.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AW = PV \\ \Rightarrow\ BF = PV(zie\ a) \end{array}\right\} \Rightarrow AW = BF \\ WT = FT \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$AW\text{-}WT = BF\text{-}FT \Rightarrow AT = BT$



41.

a. Gegeven parabool p , brandpunt F , golffront AB met voor ieder punt dezelfde snelheid.

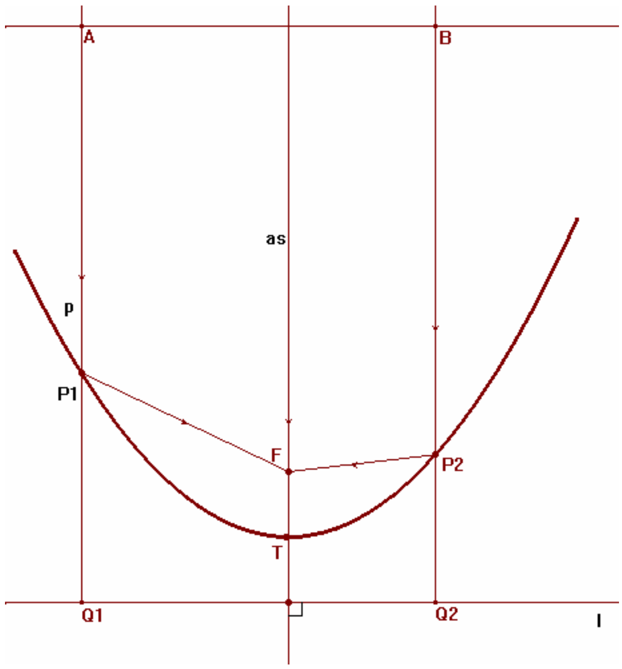
Te bew. $AP_1F = BP_2F$

Bewijs:

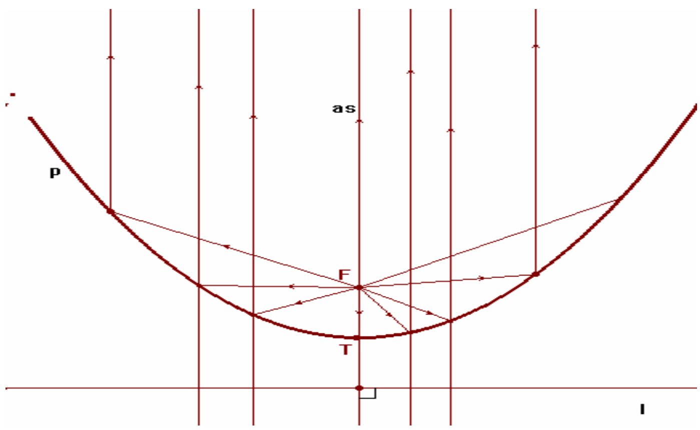
$$\left.\begin{array}{l} P_1F = P_1Q_1(par.) \Rightarrow AP_1F = AP_1Q_1 \\ P_2F = P_2Q_2(par.) \Rightarrow BP_2F = BP_2Q_2 \\ AP_1Q_1 = BP_2Q_2(evenwijdigheid) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$AP_1F = BP_2F$

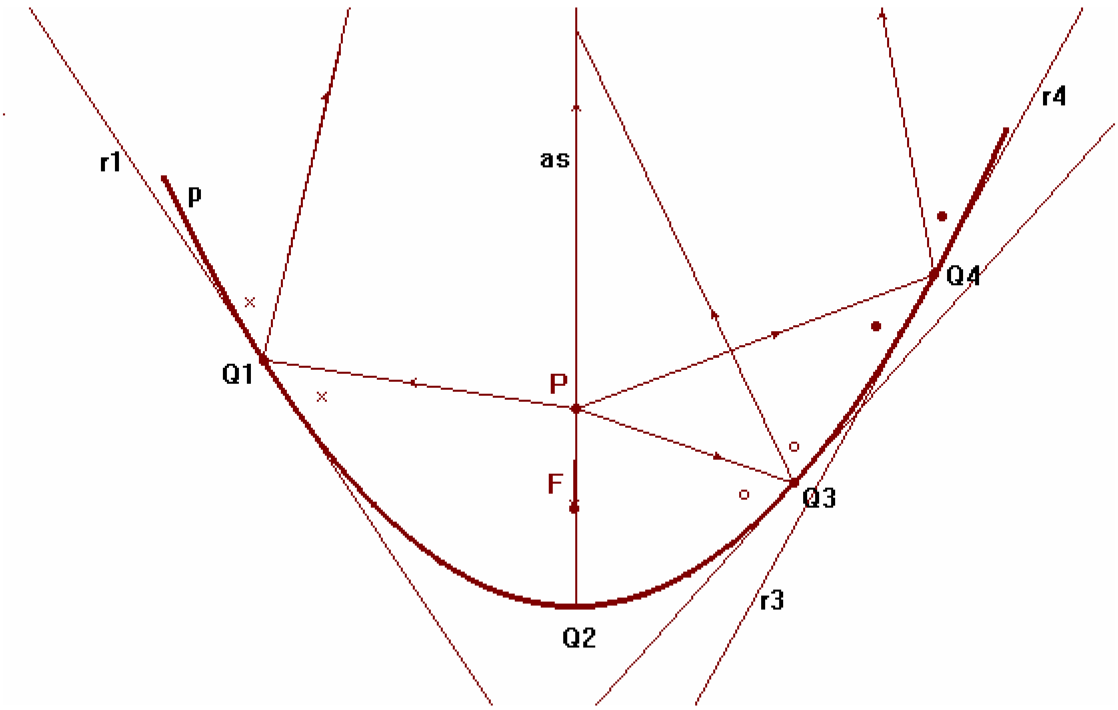
b. De toevoerwegen voor het signaal zijn even lang , daardoor komen de signalen gelijktijdig in punt F. Bij geen gelijktijdige aankomst in punt F is er dus geen goede ontvangst.



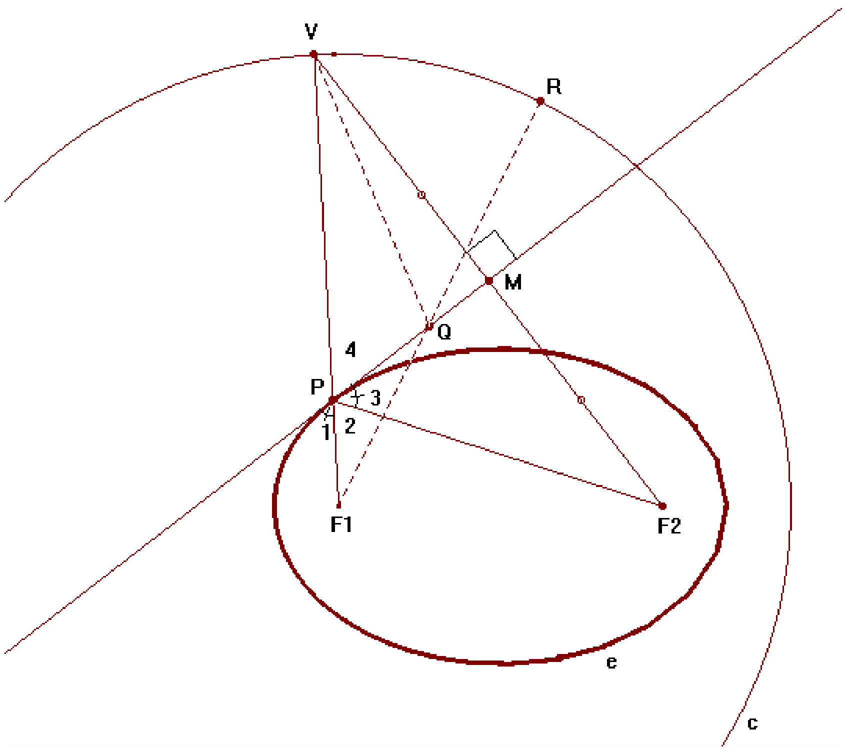
42a. Het licht vertrekt vanuit punt F via de lampenwand en verlaat via een evenwijdige bundel de fietslamp.



b.



43. Gegeven een ellips met brandpunten F_1 en F_2
Verder de raaklijn in punt P



b. Zie de figuur: In deze figuur is weer gebruik gemaakt van de constructie van een ellips m.b.v. een brandpunt F_1 en een richtcirkel c. De constructie gaat m.b.v. het punt V op c enz.
Neem verder het punt Q op de raaklijn , maar niet in punt P. Nu geldt:

$$\left.\begin{array}{l} QF_2 = QV \text{(middelloodlijn)} \\ \text{QR<QV (afstand van Q tot cirkel < afstand van Q tot ander punt op c)} \end{array}\right\} \Rightarrow QR < QF_2 \Rightarrow \text{punt}$$

Q ligt volgens de definitie van een ellips buiten de ellips e.

Nu te bew. hoek van inval = hoek van reflectie $\Leftrightarrow \angle P_1 = \angle P_3$

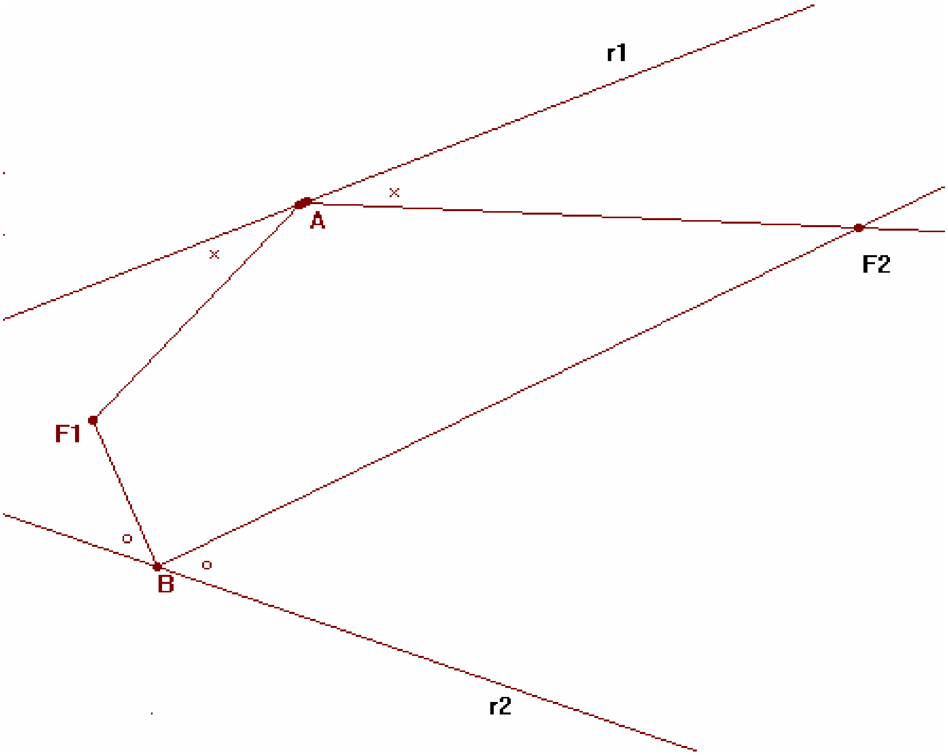
Bewijs: Punt M is het midden van lijnstuk VF_2. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} PM = PM \\ \angle PMF_2 = \angle PMV\,(90^\circ) \\ MV = MF_2\,(\text{middelloodlijn}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta MVP \cong \Delta MF_2P\,(\text{zhz}) \Rightarrow \angle P_3 = \angle P_4 \\ \angle P_1 = \angle P_4\,(\text{overstaande hoeken}) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_1 = \angle P_3 \quad \Rightarrow$$

de hoek van inval = hoek van reflectie.

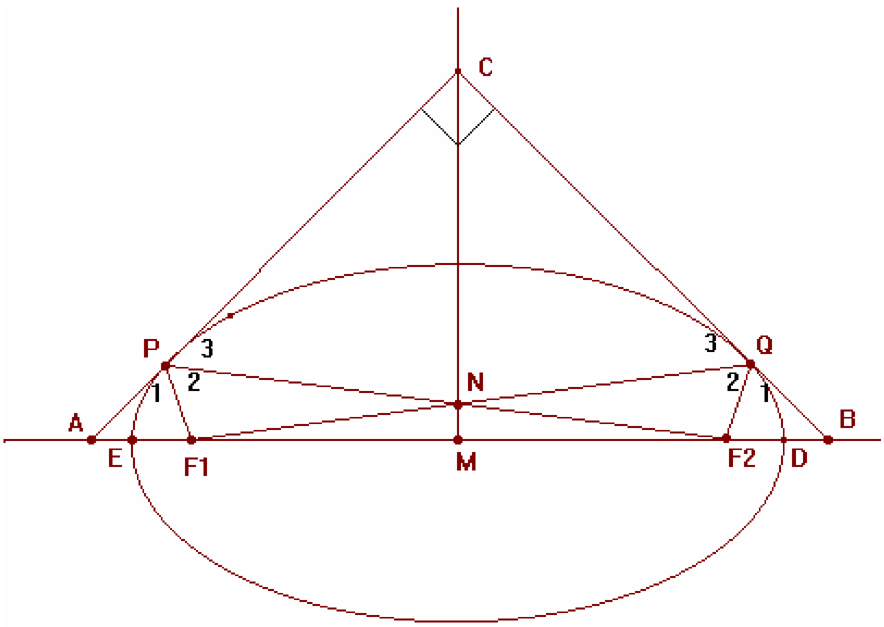
44. Zie onderstaande figuur:

Gegeven de raaklijnen r_1 en r_2 en de raakpunten A en B van de ellips e. Verder nog het brandpunt F_1.
Verbind het brandpunt F_1 met de punten A en B en maak gebruik van de eigenschap van een ellips dat de hoek van inval gelijk is aan de hoek van reflectie. Zo ontstaan twee lijnen die elkaar moeten snijden in het tweede brandpunt F_2 , omdat de aanvoerlijnen afkomstig zijn uit brandpunt F_1.



45. Gegeven de gelijkbenige driehoek ABC en $\angle$ ACB = 90º
De ellips raakt de zijden AC en BC in de punten P en Q.
De brandpunten F_1 en F_2 liggen op AB.

Te bew. $\angle PF_1Q = 90$º



Bewijs:

Teken de verbindingslijnstukken van P en Q met F_1 en met F_2. Trek CM waarbij M het midden is van AB. We krijgen nu een symmetrische figuur, waarbij de korte as samenvalt met de lijn CM. Nu geldt:

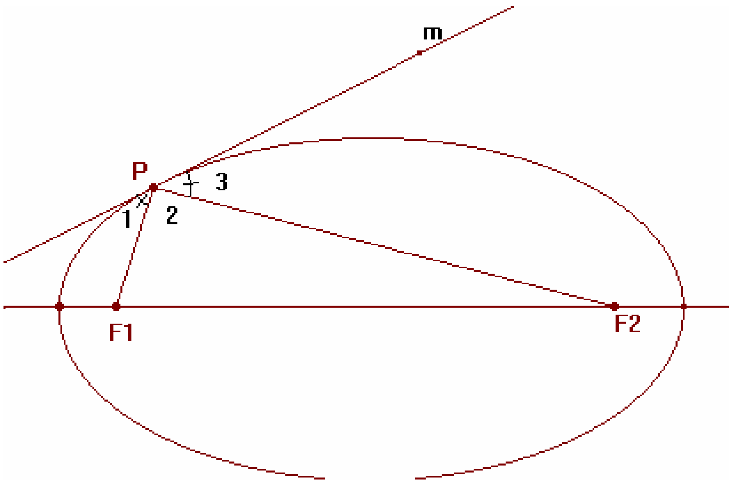
$$\left.\begin{aligned}&\angle P_3 = \angle P_1 \text{(raaklijnen aan ellips)}\\&\angle Q_3 = \angle Q_1 \text{(raaklijnen aan ellips)}\\&\angle P_3 = \angle Q_3 \text{(symmetrische figuur)}\\&\angle P_{123} = 180^\circ \text{(gestrekte hoek)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle P_3 + \angle P_2 + \angle Q_3 = 180^\circ \Rightarrow \text{vierhoek } PF_1QC \text{ is een}$$

$$\text{koordenvierhoek} \Rightarrow \left.\begin{aligned}&\angle PF_1C + \angle C = 180^\circ \text{(koordenvierhoek)}\\&\angle C = 90^\circ\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle PF_1C = 90^\circ$$

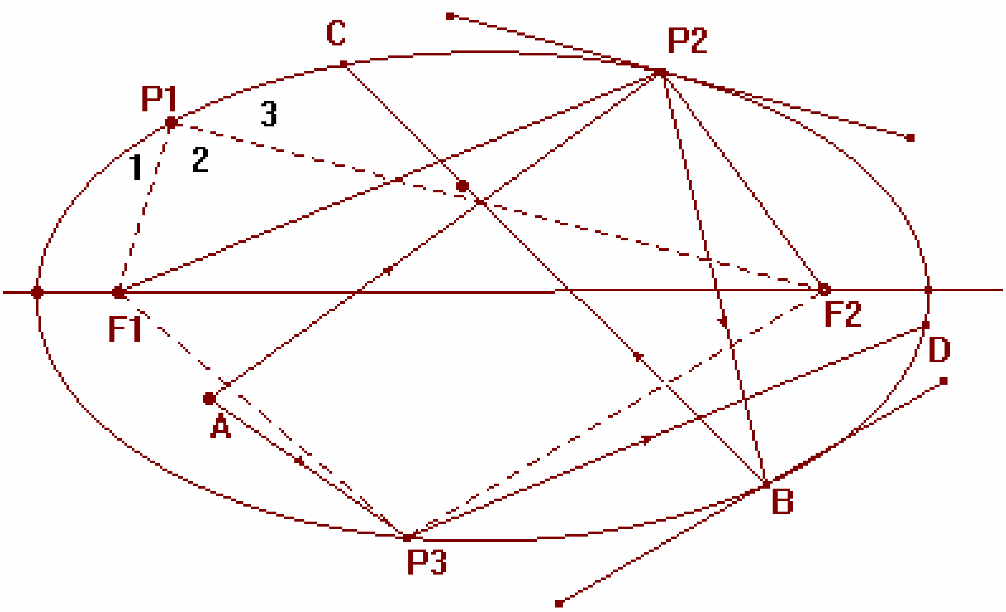
46a. Gegeven een ellips met brandpunten F_1 en F_2. Punt P is een punt op de ellips met de bijbehorende raaklijn m.

Bewijs:

Teken PF_1 en $PF_2 \Rightarrow$
$\angle P_1 = \angle P_3$ (raaklijneigenschap) $\Rightarrow$
een lichtstraal die begint in punt F_1 wordt “gespiegeld “ in de ellips en wordt weerkaatst naar het punt F_2.



46b.

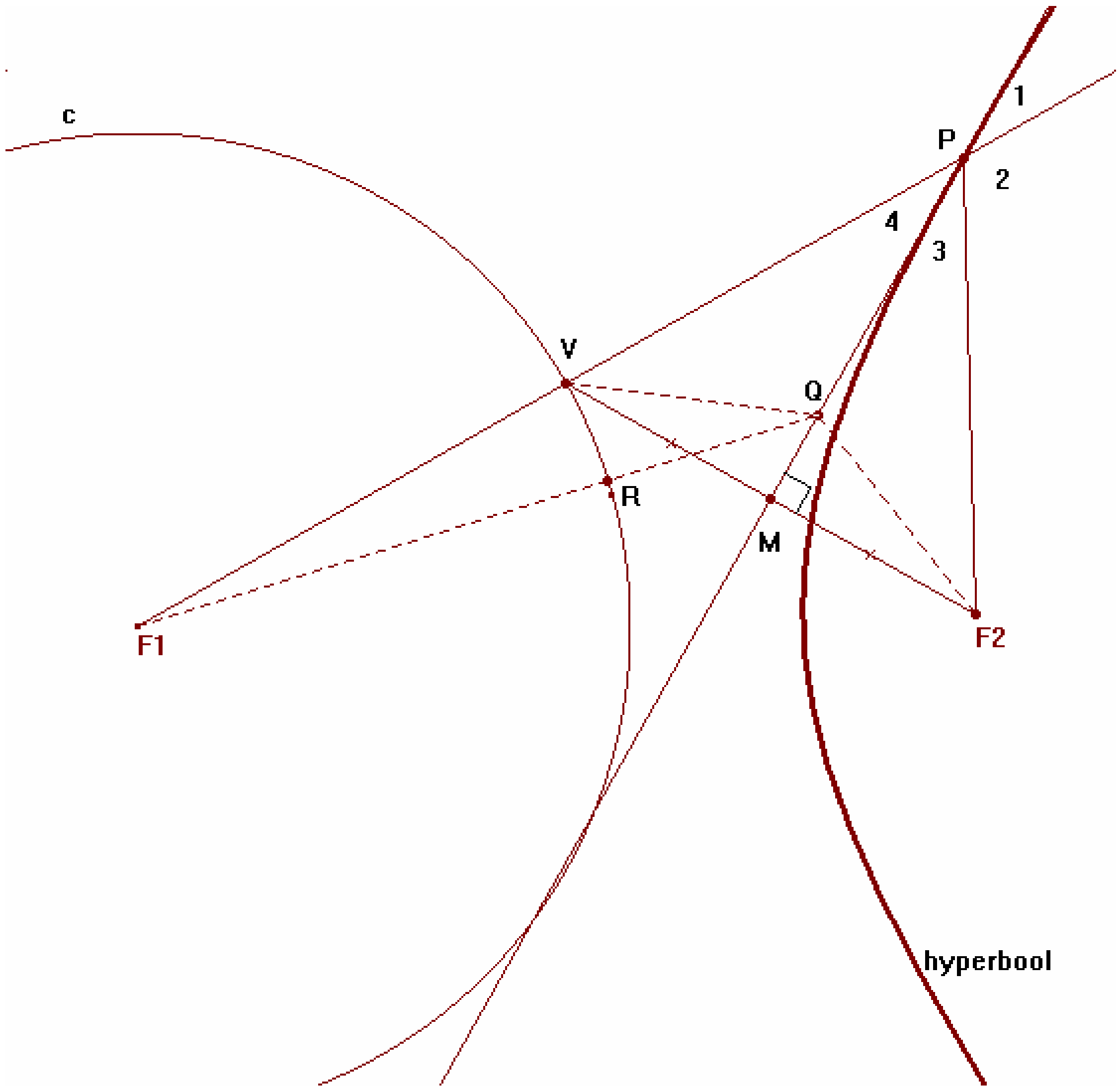


46c. Zie de figuur bij onderdeel 46b. $\angle$ (AP_2raaklijn) is groter dan $\angle$ (F_1P_2raaklijn) . Nu wordt alles “gespiegeld “ in de ellips. We krijgen dan : $\angle$ (BP_2raaklijn) is dus ook weer groter dan $\angle$(F_2P_2raaklijn) . Dit betekent dat lijn P_2B ook tussen de brandpunten F_1 en F_2 zal gaan. Dit principe geldt steeds voor alle punten .

d. Nu geldt dat $\angle$(AP_3raaklijn) is kleiner dan $\angle$ (F_1P_3raaklijn). Nu wordt alles “gespiegeld “ in de ellips. Dan geldt dus : $\angle$(DP_3raaklijn) is kleiner dan $\angle$ (F_2P_3raaklijn). Dit betekent dat alle punten waarvoor geldt dat de lijnen buiten de brandpunten F_1 en F_2 worden getekend de weerkaatsingslijnen ook buiten F_1 en F_2 blijven.

47. Gegeven de hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 en de richtcirkel *c*. Punt *P* ligt op de hyperbool , terwijl punt *V* op de cirkel *c* ligt.
Punt *Q* nemen weer op de m.l.l. van VF_2 , waarbij *P* niet gelijk is aan punt *Q*.

Te bew. 1) Punt *Q* ligt buiten de hyperbool 2) $\angle P_1 = \angle P_3$ dus
er moet gelden: hoek van inval bij punt *P* is gelijk aan de reflectiehoek in punt *P*.



We gaan weer hetzelfde principe toepassen als bij de parabool en bij de ellips.

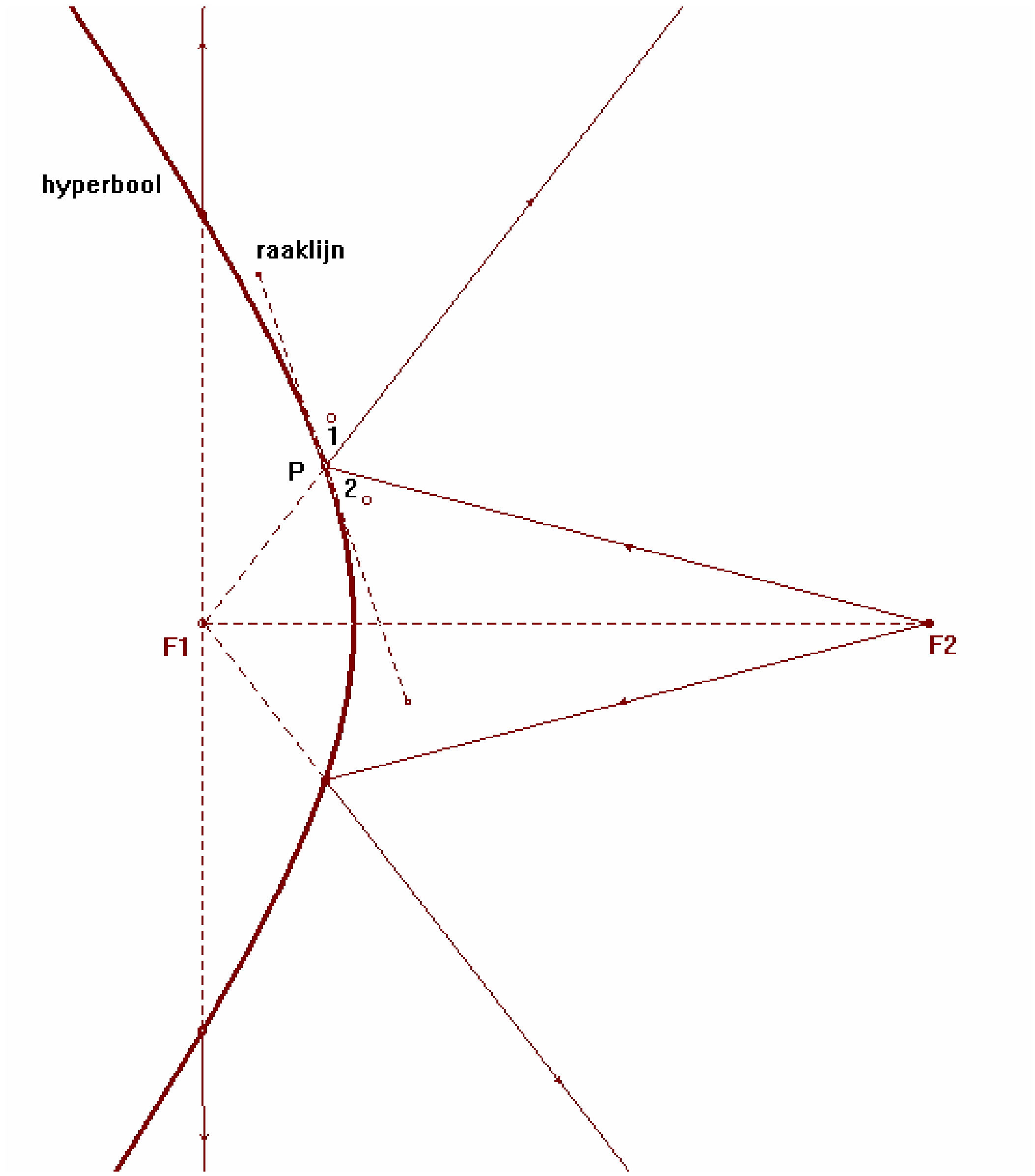
$$\left.\begin{array}{l} QV = QF_2 (Q \text{ op de m.l.l.}) \\ \text{QR<QV(afstand tot cirkel is kleiner dan QV)} \end{array}\right\} \Rightarrow QR < QF_2 \Rightarrow Q \text{ ligt buiten de hyperbool.}$$

We hebben het midden van VF_2 M genoemd. Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} MV = MF_2 \\ \angle PMV = \angle PMF_2 = 90^\circ (m.l.l.) \\ PM = PM \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PMV \cong \Delta PMF_2 (zhz) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle P_3 = \angle P4 \\ \angle P_1 = \angle P_4 \text{(overstaande hoeken)} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \angle P_3 = \angle P_1 \Rightarrow$ de hoek van inval = de reflectiehoek.

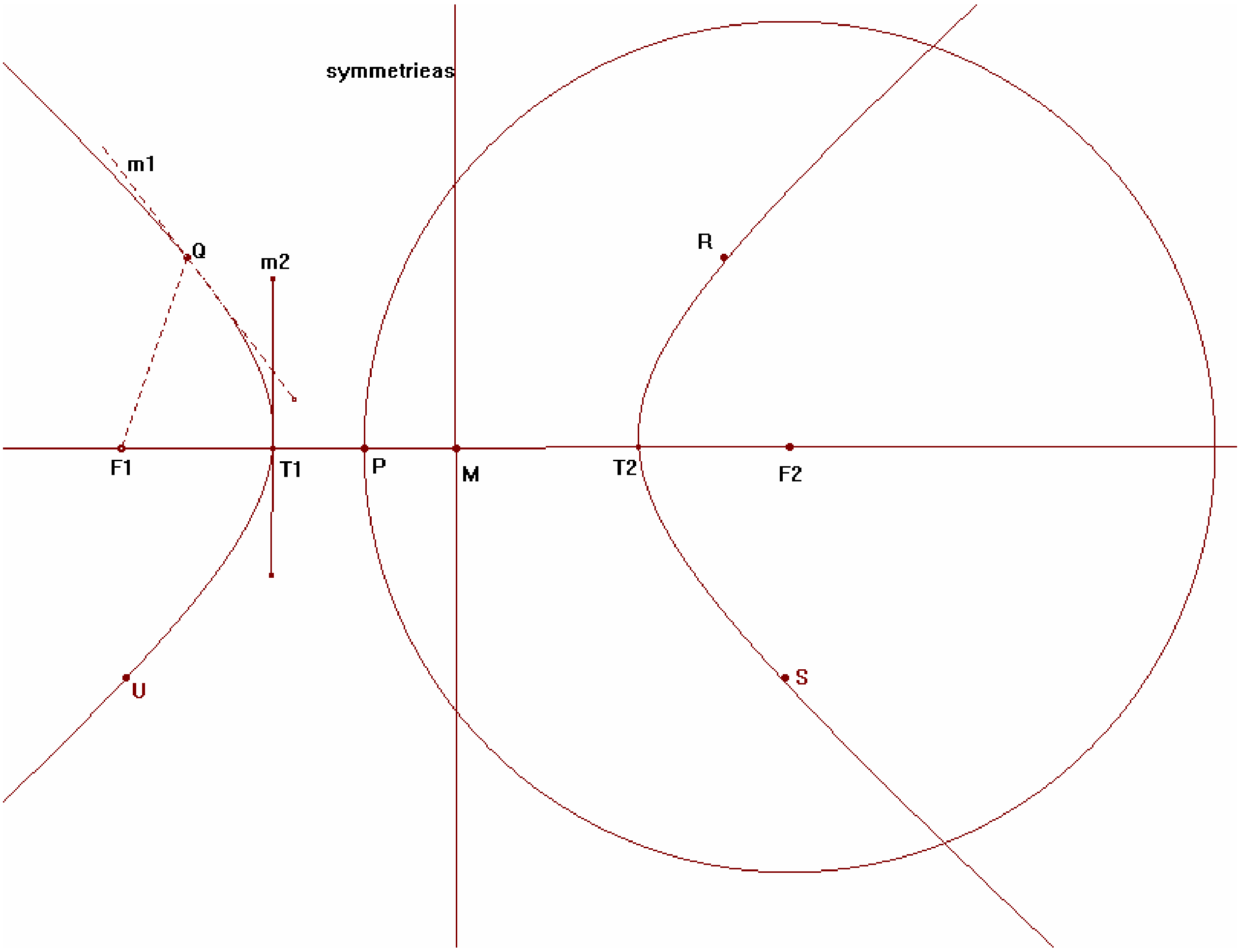
48.



Als we kijken naar punt P op de hyperbool dan weten we dat op grond van het gevondene bij opgave 47 geldt dat $\angle P_1 = \angle P_2$. Het is duidelijk dat dan een lijn afkomstig uit punt F_2 bij een ellips afbuigt naar punt F_1 toe en bij een hyperbool terugkaatst in punt P in de richting van F_1P. Pas dit principe toe bij de andere drie lijnen.

49.

De raaklijnen zijn getekend in de top T_1 en punt Q. Punt F_1 kunnen we spiegelen t.o.v. de symmetrieas. Zo vinden we brandpunt F_2. Ook spiegelen we de top T_1 en krijgen dan de tweede top T_2. Door nu brandpunt F_1 te spiegelen in de top T_1 krijgen we het punt P.
De cirkel met middelpunt F_2 en straal F_2P is nu een richtcirkel van de gegeven hyperbool. Verder kunnen we ook nog de punten Q en U spiegelen in de symmetrieas. Dit levert de punten R en S op . Nu kunnen we de tweede hyperbooltak tekenen.



50. Gegeven de hyperbool met brandpunten F_1 en F_2. Punt M is het midden van F_1F_2. Lijn k is raaklijn aan de hyperbool in punt A. Punt S is de loodrechte projectie van F_2 op lijn k.

Te Bew. $d(M\,,S)$ is onafhankelijk van de ligging van punt A op de hyperbool.

Bewijs: Zie de onderstaande figuur.
Aangezien lijnstuk F_2S loodrecht staat op AS kunnen we punt F_2 spiegelen in lijn AS. Dit geeft het punt V van de richtcirkel met middelpunt F_1 en straal F_1V.
Nu geldt:

$$\left.\begin{array}{l} F_2S = VS \Rightarrow F_2S : F_2V = 1:2 \\ F_2M = F_1M \Rightarrow F_2M : F_2F_1 = 1:2 \\ \angle MF_2S = \angle F_1F_2V\,(\text{zelfde hoek}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MF_2S \sim \Delta F_1F_2V\,(zhz) \Rightarrow MS : F_1V = 1:2 \Rightarrow MS = \tfrac{1}{2}F_1V$$

Aangezien F_1V de straal van de richtcirkel is geldt dus nu dat de lengte MS onafhankelijk is van de plaats van punt A op de hyperbool.